К ВОПРОСУ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ВРАЩЕНИЙ ЯКОБИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦ В MS EXCEL

В. К. Пчельник, И. Н. Ревчук

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Республика Беларусь,
E-mail: i_revchuk@mail.ru

Приводится реализация решения полной проблемы собственных значений классическим методом вращений Якоби с использованием функций рабочего листа MS Excel.

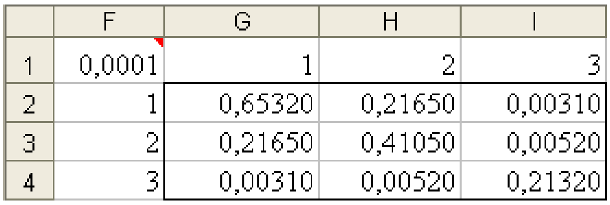
Ключевые слова: собственные значения, собственные векторы, метод вращений Якоби, электронные таблицы MS EXCEL.

Целью данной работы является демонстрация возможностей электронных таблиц MS EXCEL для получения способа детальной проверки выполнения заданий студентами на примере задачи нахождения собственных чисел и собственных векторов классическим методом Якоби [1]. Рассмотрим решение на примере вещественной симметрической матрицы порядка 3.

Пусть исходная матрица A располагается на рабочем листе в диапазоне G2:I4 (рис. 1). Точность вычислений задается в ячейке F1.

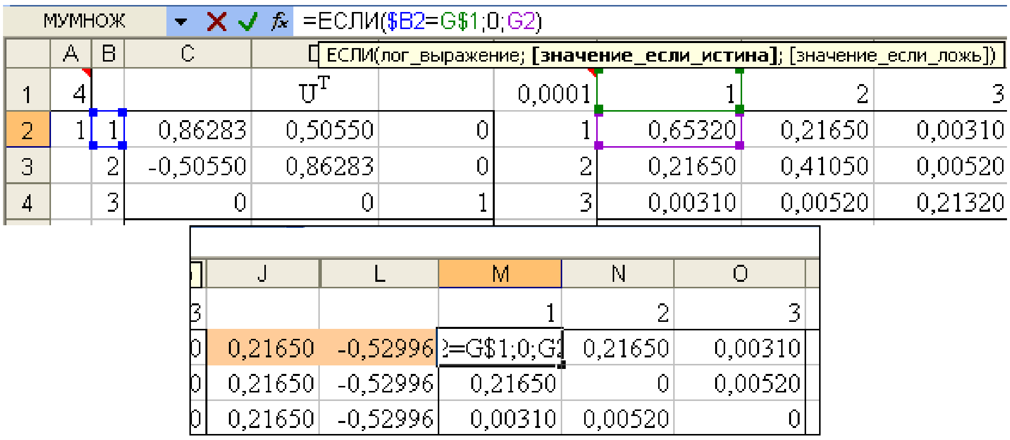
Алгоритм метода состоит в выполнении ряда шагов:

1) поиск максимального по модулю внедиагонального элемента;
2) определение плоскости поворота $(p,q), 1 \le p \ne q \le 3$;
3) определение угла вращения φ;
4) вычисление матрицы вращений U в плоскости (p,q) и матрицы U^T;
5) получение матрицы $A^{(k)} = U^T A^{(k-1)} U, (k = 1,2,...; A^{(0)} = A)$, элемент $a_{pq}^{(k)}$ которой равен нулю;
6) определение момента завершения вычислений.



	F	G	H	I
1	0,0001	1	2	3
2	1	0,65320	0,21650	0,00310
3	2	0,21650	0,41050	0,00520
4	3	0,00310	0,00520	0,21320

Рис. 1



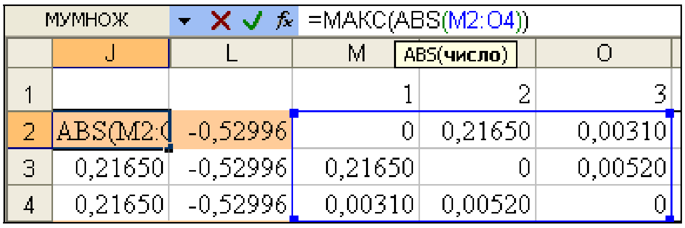
МУМНОЖ =ЕСЛИ($B2=G$1;0;G2)

ЕСЛИ(лог_выражение; [значение_если_истина]; [значение_если_ложь])

	A	B	C						
1	4			U^T		0,0001	1	2	3
2	1	1	0,86283	0,50550	0	1	0,65320	0,21650	0,00310
3		2	-0,50550	0,86283	0	2	0,21650	0,41050	0,00520
4		3	0	0	1	3	0,00310	0,00520	0,21320

J	L	M	N	O
		1	2	3
0,21650	-0,52996	=G$1;0;G	0,21650	0,00310
0,21650	-0,52996	0,21650	0	0,00520
0,21650	-0,52996	0,00310	0,00520	0

Рис. 2

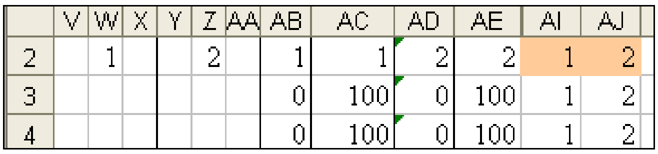


МУМНОЖ =МАКС(ABS(M2:O4))

ABS(число)

	J	L	M	N	O
1			1	2	3
2	ABS(M2:	-0,52996	0	0,21650	0,00310
3	0,21650	-0,52996	0,21650	0	0,00520
4	0,21650	-0,52996	0,00310	0,00520	0

Рис. 3



	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AI	AJ
2		1			2		1	1	2	2	1	2
3							0	100	0	100	1	2
4							0	100	0	100	1	2

Рис. 4

Для отбора максимального внедиагонального элемента формируется матрица в диапазоне M2:O4 с использованием формулы (1). Формула вводится в ячейку M2 и распространяется на указанный диапазон (рис. 2).

=ЕСЛИ($B2=G$1;0;G2) (1)

{=МАКС(ABS(M2:O4))} (2)

Максимальный по модулю элемент в диапазоне M2:O4 формируется с использованием формулы обработки массива (2) в ячейке J2 (рис. 3).

Плоскость поворота (p,q) определяется в диапазонах V2:X4, AB2:AB4, AC2:AC4 (3)-(5), Y2:AA4, AD(2):AD4, AE2:AE4 (6)-(8) и окончательно в ячейках AI2 и AJ2 (9)-(10) (рис. 4).

=ЕСЛИ(И(ОКРУГЛ(ABS(G2);6)=ОКРУГЛ($J2;6);$B2<G$1);$F2;"") (3)

=МИН(V2:X2) (4)

=ЕСЛИ(AB2<>0;AB2;100) (5)

=ЕСЛИ(V2<>"";G$1;"") (6)

=МИН(Y2:AA2) (7)

=ЕСЛИ(AD2<>0;AD2;100) (8)

=МИН(AC2:AC4) (9)

=ВПР(AI2;AC2:AE4;3;ЛОЖЬ) (10)

Угол поворота φ вычисляется в ячейке L2 по формуле (11) (рис. 3).

=ЕСЛИ(ЕОШИБКА(0,5*ATAN(2*СМЕЩ(G2;AI2-1;AJ2-1;1;1)/(СМЕЩ(G2;AJ2-1;AJ2-1;1;1)-СМЕЩ(G2;AI2-1;AI2-1;1;1)))); ЕСЛИ(K2<0;ПИ()/4;-ПИ()/4);0,5*ATAN(2*СМЕЩ(G2;AI2-1;AJ2-1;1;1)/(СМЕЩ(G2;AJ2-1;AJ2-1;1;1)-СМЕЩ(G2;AI2-1;AI2-1;1;1)))) (11)

Матрица поворота U формируется в диапазоне P2:R4 с использованием формулы 12 (рис. 5). Транспонированная матрица U^T (13) располагается в диапазоне C2:E4 (рис. 6).

=ЕСЛИ((AF$1=$AI2)*($F2=$AI2)+(AF$1=$AJ2)*($F2=$AJ2)>=1;COS($L2);
ЕСЛИ((AF$1=$AI2)*($F2=$AJ2)=1;-SIN($L2);
ЕСЛИ((AF$1=$AJ2)*($F2=$AI2)=1;SIN($L2);
ЕСЛИ((M$1=$F2)*($F2<>$AI2)*($F2<>$AJ2)=1;1;0)))) (12)

{=ТРАНСП(P2:R4)} (13)

{=МУМНОЖ(C2:E4;G2:I4)} (14)

{=МУМНОЖ(S2:U4;P2:R4)} (15)

Произведение матриц $A^{(k)} = U^T A^{(k-1)} U$ получаем последовательным перемножением $U^T A^{(k-1)}$ (14) и $(U^T A^{(k-1)})U$ (15) в диапазонах S2:U4 и G5:I7 соответственно (рис. 7– 8).

В ячейке AK2 вычисляется квадратный корень из суммы квадратов внедиагональных элементов (16). Это значение используется для определения момента завершения итерационного процесса.

В диапазоне AL2:AL4 формируется вектор собственных чисел (17). На первой итерации в диапазон AM2:AO4 помещена матрица U (18).

=КОРЕНЬ(СУММКВ(M2:O4)) (16)

=ГПР(F2;$G$1:I4;СТРОКА(F2)) (17)

{=P2:R4} (18)

{=МУМНОЖ(AM2:AO4;P5:R7)} (19)

=ЕСЛИ(AK5<=$F$1;0;A2+1) (20)

Для выполнения второй итерации копируем диапазон B2:E4 в B5:E7, J2:AO4 – в J5:AL7. В диапазон AM5:AO7 вводим формулу (19) для формирования собственных векторов. В ячейку вводится A5 формула (20) для определения момента завершения итерационного процесса.

Последующие итерации получаются копированием диапазона A5:AO7 и последующие вставкой его в диапазоны A8:AO10, A11:AO13 и т. д. до тех пор, пока в столбце A не появится нулевое значение, являющееся признаком завершения работы алгоритма (рис. 9).

На рисунке 9 собственные числа и собственные векторы располагаются в диапазонах AL11:AL13 и AM11:AO13 соответственно. Проверка $AX = \lambda X$ полученных собственных значений и собственных векторов осуществляется в диапазонах P17:R19 и P21:R23 (рис. 10−11).

	P	Q	R
1		U	
2	0,86283	-0,50550	0
3	0,50550	0,86283	0
4	0	0	1

Рис. 5

	C	D	E
1		U^T	
2	0,86283	0,50550	0
3	-0,50550	0,86283	0
4	0	0	1

Рис. 6

	S	T	U
1		$U^T A$	
2	0,67304	0,39431	0,00530
3	-0,14339	0,24475	0,00292
4	0,00310	0,00520	0,21320

Рис. 7

	F	G	H	I
1	0,0001	1	2	3
5	1	0,780040	0	0,005303
6	2	0	0,283660	0,002920
7	3	0,005303	0,002920	0,213200

Рис. 8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L
1	4			U^T		0,0001	1	2	3		
2	1	1	0,86283	0,50550	0	1	0,65320	0,21650	0,00310	0,21650	-0,52996
3		2	-0,50550	0,86283	0	2	0,21650	0,41050	0,00520	0,21650	-0,52996
4		3	0	0	1	3	0,00310	0,00520	0,21320	0,21650	-0,52996
5	2	1	0,999956	0	0,00935	1	0,780040	0	0,005303	0,00530	-0,00935
6		2	0	1	0	2	0	0,283660	0,002920	0,00530	-0,00935
7		3	-0,00935	0	0,99996	3	0,005303	0,002920	0,213200	0,00530	-0,00935
8	3	1	1	0	0	1	0,780089	0,000027	0,000000	0,00292	-0,04131
9		2	0	0,99915	0,04130	2	0,000027	0,283660	0,002920	0,00292	-0,04131
10		3	0	-0,04130	0,99915	3	0,000000	0,002920	0,213150	0,00292	-0,04131
11	0	1	1	0,00005	0	1	0,780089	0,000027	-0,000001	0,00003	-0,00005
12		2	-0,00005	1	0	2	0,000027	0,283781	0	0,00003	-0,00005
13		3	0	0	1	3	-0,000001	0	0,213030	0,00003	-0,00005

	AE	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO
1								
2	2	1	2	0,3063	0,65320	0,86283	-0,50550	0,00000
3	100	1	2		0,41050	0,50550	0,86283	0,00000
4	100	1	2		0,21320	0	0	1
5	3	1	3	0,00856	0,78004	0,86279	-0,50550	-0,00807
6	100	1	3		0,28366	0,50548	0,86283	-0,00473
7	100	1	3		0,21320	0,00935	0	0,999956
8	100	2	3	0,00413	0,78009	0,86279	-0,50540	0,01281
9	3	2	3		0,28366	0,50548	0,86190	-0,04036
10	100	2	3		0,21315	0,00935	0,04130	0,99910
11	2	1	2	3,9E-05	0,78009	0,86276	-0,50545	0,01281
12	100	1	2		0,28378	0,50552	0,86187	-0,04036
13	100	1	2		0,21303	0,00936	0,04130	0,99910

Рис. 9

P17 — f_x {=МУМНОЖ($G$2:$I$4;AM11:AM13)}

	M	N	O	P	Q	R
17	проаерка	AX=λX:	AX:	0,67303	-0,14344	0,00273
18				0,39435	0,24458	-0,00860
19				0,00730	0,01172	0,21284
20						
21			λX:	0,67303	-0,14344	0,00273
22				0,39435	0,24458	-0,00860
23				0,00730	0,01172	0,21284

Рис. 10

P21 — f_x =$AL$11*AM11

	M	N	O	P	Q	R
17	проаерка	AX=λX:	AX:	0,67303	-0,14344	0,00273
18				0,39435	0,24458	-0,00860
19				0,00730	0,01172	0,21284
20						
21			λX:	0,67303	-0,14344	0,00273
22				0,39435	0,24458	-0,00860
23				0,00730	0,01172	0,21284

Рис. 11

МУМНОЖ — f_x =ВПР($D$1*10+$F2;$AR$2:$AU$217;G$1+1)

	A	B	C	D	ВПР(искомое_значение; **таблица**; номер_столбца; [интервальный_просмотр])						AR	AS	AT	AU
1	7		вариант	3		1E-04	1	2	3			1	2	3
2	1	1	0,70711	0	0,70711	1	=ВПР($D	2	7	10,3923	11	0,6532	0,2165	0,0031
3		2	0	1	0	2	2	18	1		12	0,2165	0,4105	0,0052
4		3	-0,7071	0	0,70711	3	7	1	25		13	0,0031	0,0052	0,2132
5	2	1	0,9892	0,14659	0	1	32	2,12132	3,55E-15	3,16228	21	4	2	1
6		2	-0,1466	0,9892	0	2	2,12132	18	-0,707107		22	2	5	3
7		3	0	0	1	3	1,8E-15	-0,70711	18		23	1	3	6
8	3	1	1	0	0	1	32,3144	0	-0,103658	1	31	25	2	7
9		2	0	0,78079	0,6248	2	4,4E-16	17,68563	-0,699468		32	2	18	1
10		3	0	-0,6248	0,78079	3	-0,10366	-0,69947	18		33	7	1	25
11	4	1	0,99998	0	-0,0059	1	32,3144	-0,06477	-0,080934	0,14659	41	16	5	4
12		2	0	1	0	2	-0,06477	17,1259	0		42	5	10	3
13		3	0,00588	0	0,99998	3	-0,08093	1,78E-15	18,55973		43	4	3	27
14	5	1	0,99999	-0,0043	0	1	32,3148	-0,06476	0	0,09159	51	17	7	2
15		2	0,00426	0,99999	0	2	-0,06476	17,1259	-0,000381		52	7	11	1
16		3	0	0	1	3	-1,6E-15	-0,00038	18,55925		53	2	1	25
17	6	1	1	0	0	1	32,3151	0	1,62E-06	0,00054	61	24	6	5
18		2	0	1	0,00027	2	-7,4E-16	17,12563	-0,000381		62	6	14	7
19		3	0	-0,0003	1	3	1,6E-06	-0,00038	18,55925		63	5	7	23
20	0	1	1	0	1,2E-07	1	32,3151	4,32E-10	1,62E-06	2,3E-06	71	14	4	4
21		2	0	1	0	2	4,3E-10	17,12563	0		72	4	12	1
22		3	-1E-07	0	1	3	1,6E-06	1,77E-15	18,55925		73	4	1	15

Рис. 12

Для быстрой проверки большого числа вариантов можно воспользоваться следующим приемом. Помещаем в ячейку D1 номер нужного варианта (рис. 13). Задания для самостоятельного решения располагаются в столбцах AR:AU, причем в столбце AR последняя цифра означает номер строки матрицы, а остальные – номер варианта. Функция (21) переносит нужную матрицу в область решений.

=ВПР($D$1*10+$F2;$AR$2:$AU$217;G$1+1) (21)

Нетрудно заметить, что решение задачи с другой размерностью матрицы осуществляется аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уилкинсон, Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений / Дж. Х. Уилкинсон. М.: Наука, 1970. С. 244−250.