УДК 517.9 МАТЕМАТИКА

© А.Б. АНТОНЕВИЧ, Я.В. РАДЫНО

ОБ ОБЩЕМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ АЛГЕБР ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С.М. Никольским 4 XII 1990)

Во многих физических приложениях теории обобщенных функций возникает необходимость придать смысл таким объектам, как δ^2, $\delta'\delta$ и т.д., где δ – функция Дирака, или, более общо, придать смысл произведению двух обобщенных функций [1]. Хотя Л. Шварцем было показано [2], что ввести ассоциативное умножение в пространстве распределений невозможно, многочисленные усилия в этом направлении позволили выделить классы пар (u, v) распределений, для которых достаточно разумно определено произведение $u \cdot v$. Другой подход основан на введении вместо распределений новых объектов, которые, обладая основными свойствами распределений, допускают корректную операцию умножения, при этом распределения естественно вкладываются в классы новых объектов. Наиболее общими среди таких конструкций являются классы "новых обобщенных функций" Ж.-Ф. Коломбо [3] и Ю.В. Егорова [4].

В настоящей работе на основе анализа ряда конструкций, в первую очередь Коломбо и Егорова, предложен общий метод, позволяющий строить, кроме упомянутых выше, новые алгебры "обобщенных функций", в частности, включающие ультрараспределения. Заметим, что частным случаем предложенной конструкции является также построение нестандартных расширений [5].

Более конкретная постановка задачи об умножении обобщенных функций состоит в следующем. Пусть задано некоторое пространство обобщенных функций E и содержащаяся в нем некоторая алгебра $\mathcal{E}$, состоящая из бесконечно дифференцируемых функций. Требуется построить новую алгебру $\mathcal{G}$ и вложение (линейное инъективное отображение) j: $E \to \mathcal{G}$ такое, что для $u, v \in \mathcal{E}$ $j(uv) = j(u)j(v)$. Обратим внимание на то, что хотя для $u \in \mathcal{E}$, $v \in E$ определено произведение $u \cdot v \in E$, нельзя, вообще говоря, требовать выполнения равенства $j(uv) = j(u)j(v)$, поскольку пример Л.Шварца показывает, что в случае $E = \mathcal{D}'(\Omega)$ и $\mathcal{E} = C^\infty(\Omega)$ алгебр, удовлетворяющих условию, не существует.

Предлагаемая ниже конструкция не использует до определенного этапа, что E состоит из обобщенных функций, а $\mathcal{E}$ – из бесконечно дифференцируемых и имеет более общий характер.

Дополнительной структурой, позволяющей строить новые алгебры, является аппарат регуляризации элементов из E элементами из $\mathcal{E}$.

В рассматриваемой конструкции исходными объектами являются:

а) отделимое топологическое векторное пространство E (для элементов которого требуется определить произведение);

б) топологическая алгебра $\mathcal{E}$ непрерывно и плотно вложенная в топологическое векторное пространство E;

в) некоторый набор способов регуляризации, т.е. семейство линейных операторов $R_{\varphi,\epsilon}$: $E \to \mathcal{E}$, $\varphi \in \Phi$, $\epsilon \in I$ (где Φ – фиксированное множество, I – множество с заданным фильтром $\mathcal{F}$) такое, что при каждом фиксированном $\varphi \in \Phi$, $R_{\varphi,\epsilon}(u) \to u$ по фильтру $\mathcal{F}$ в топологии E.

В примерах обычно $I = (0, 1)$ и $\mathcal{F}$ – фильтр порожден множествами $(0, \eta)$, а операторы $R_{\varphi,\epsilon}$ линейные и непрерывные.

Сначала рассмотрим задачу о вложении E в алгебру.

Через $G(\Phi, \mathcal{E})$ обозначим алгебру всех функций, определенных на $\Phi \times I$ со значением в $\mathcal{E}$. Пространство E вкладывается в $G(\Phi, \mathcal{E})$ как векторное пространство с помощью отображения $E \ni u \to R_u \in G(\Phi, \mathcal{E})$, где $R_u(\varphi, \epsilon) = R_{\varphi,\epsilon}(u)$.

В ряде задач эта естественная и "тривиальная" конструкция вложения E в алгебру позволяет получать содержательные результаты. Однако поставленной выше задачи оно не решает, так как при вложении $\mathcal{E}$, как подмножества из E, в алгебру $G(\Phi, \mathcal{E})$ произведение не переходит в произведение. Алгебра $G(\Phi, \mathcal{E})$ чрезвычайно обширна и в конкретных задачах оказывается, что различные ее элементы описывают одно и то же физическое состояние. Поэтому в зависимости от конкретной задачи нужно разбить $G(\Phi, \mathcal{E})$ на классы эквивалентности.

Два элемента F_1 и F_2 из $G(\Phi, \mathcal{E})$ называются слабо эквивалентными, если для любого $\varphi \in \Phi$, $F_1(\varphi, \epsilon) - F_2(\varphi, \epsilon) \to 0$ в E по $\mathcal{F}$. Если $F_1(\varphi, \epsilon) = R_{\varphi,\epsilon}(u)$ для некоторого $u \in E$, т.е. F_1 представляет u в алгебре $G(\Phi, \mathcal{E})$, то слабо эквивалентный ему элемент F_2 естественно считать другим представлением этого элемента u. Однако если отождествить слабо эквивалентные элементы в $G(\Phi, \mathcal{E})$, то полученное фактор-пространство не обладает естественной структурой алгебры, поскольку совокупность элементов, слабо эквивалентных нулю, не является идеалом и даже подалгеброй в $G(\Phi, \mathcal{E})$.

Предлагаемая конструкция заключается в следующем. В алгебре $G(\Phi, \mathcal{E})$ выделяется подалгебра $G_M(\Phi, \mathcal{E})$ и в ней некоторый идеал $\mathcal{N}(\Phi, \mathcal{E})$. Искомым объектом является фактор-алгебра $\mathcal{G}(\Phi, \mathcal{E}) = G_M(\Phi, \mathcal{E})/\mathcal{N}(\Phi, \mathcal{E})$.

Выбор алгебр G_M и $\mathcal{N}$ является наиболее тонким местом всего построения. Чтобы алгебра $\mathcal{G}$ давала решение поставленной задачи, естественно наложить на алгебру G_M и идеал $\mathcal{N}$ дополнительные условия, сформулированные в следующем утверждении.

Т е о р е м а 1. *Пусть подалгебра G_M и идеал $\mathcal{N}$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) *для любого $u \in E$ элемент R_u принадлежит G_M;*

2) *идеал $\mathcal{N}$ содержится во множестве слабо эквивалентных нулю элементов;*

3) *элементы вида $R_{uv} - R_u R_v$ принадлежат $\mathcal{N}$ для любых $u, v \in \mathcal{E}$. Тогда пространство E вкладывается в алгебру $\mathcal{G} = G_M/\mathcal{N}$ как векторное подпространство, а $\mathcal{E}$ – как подалгебра. Если, кроме того, в алгебре $\mathcal{E}$ задана операция дифференцирования и алгебры G_M и $\mathcal{N}$ инвариантны относительно этой операции, то в $\mathcal{G}$ естественным образом определена операция дифференцирования и $\mathcal{E}$ вложено в $\mathcal{G}$ вместе с дифференцированием.*

Подалгебры в $G(\Phi, \mathcal{E})$, удовлетворяющие условию 1), всегда существуют. Например, в качестве G_M можно взять или всё G, или наименьшую алгебру, содержащую элементы R_u.

Напротив, поскольку условие 2) ограничивает идеал $\mathcal{N}$ сверху, а условие 3) ограничивает его снизу, то существование идеала, удовлетворяющего условиям 2) и 3), не очевидно.

Т е о р е м а 2. *Если существует алгебра $\mathcal{A}$ и вложение E в $\mathcal{A}$, при котором $\mathcal{E}$ вкладывается как подалгебра, то при любом наборе способов регуляризации $(R_{\varphi,\epsilon})$, $\varphi \in \Phi$, $\epsilon \in I$, существуют такие подалгебры G_M и $\mathcal{N}$, удовлетворяющие условиям теоремы* 1, *что построенная алгебра $\mathcal{G} = G_M/\mathcal{N}$ изоморфна наименьшей подалгебре в $\mathcal{A}$, содержащей E.*

Таким образом, любое вложение E в алгебру может быть получено с помощью описанной выше конструкции. Трудность заключается в эффективном задании идеала $\mathcal{N}$.

Укажем один способ эффективного задания (в терминах роста по ϵ) подалгебры G_M и идеала $\mathcal{N}$ и сформулируем условия на набор способов регуляризации, при которых алгебра $\mathcal{G} = G_M/\mathcal{N}$ дает решение задачи.

Пусть $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ – некоторая система полунорм, определяющая топологию в $\mathcal{E}$.

Для двух функций f_1 и f_2, определенных на $\Phi\times I$, будем в дальнейшем писать, что $f_1\leqslant f_2$, если для любого $\varphi\in\Phi$ существует элемент V фильтра $\mathcal{F}$ на I, что $f_1(\varphi,\epsilon)\leqslant f_2(\varphi,\epsilon)$ для всех $\epsilon\in V$.

По любому набору L числовых функций f, определенных на $\Phi\times I$, обозначим $\mathcal{A}_L$ наименьшую алгебру функций на $\Phi\times I$, содержащих L и таких, что если $h\in\mathcal{A}_L$ и $|f|\leqslant|h|$, то $f\in\mathcal{A}_L$.

Обозначим через E_α алгебру вида $\mathcal{A}_L$ в случае, когда L состоит из функций вида $p_\alpha\circ R_u$, $u\in E$, и через $\widetilde{H}_\alpha$, когда L состоит из функций вида $p_\alpha\circ(u-R_u)$, $u\in\mathcal{E}$. Через H_α обозначим наименьший идеал в E_α, содержащий $\widetilde{H}_\alpha$.

Теорема 3. *Пусть система полунорм $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ такова, что для любого $\alpha\in A$ существует $c_\alpha>0$ такое, что*

(1) $\quad p_\alpha(uv)\leqslant c_\alpha p_\alpha(u)p_\alpha(v),\quad u,v\in\mathcal{E}.$

Пусть для любой функции $f\in H_\alpha$ существует $\varphi\in\Phi$ такое, что $f(\varphi,\epsilon)\to 0$ по фильтру $\mathcal{F}$. Тогда множество

$$G_M=\{F\in G(\Phi,\mathcal{E}):\ \forall\alpha\in A,\ p_\alpha\circ F\in E_\alpha\}$$

является подалгеброй в $G(\Phi,\mathcal{E})$, множество

$$\mathcal{N}=\{F\in G(\Phi,\mathcal{E}):\ \forall\alpha\in A,\ p_\alpha\circ F\in H_\alpha\}$$

является идеалом в G_M и пара $(G_M,\mathcal{N})$ удовлетворяет условиям теоремы 1, *а фактор-алгебра $\mathcal{G}=G_M/\mathcal{N}$ дает решение задачи о вложении E в алгебру.*

Примеры. 1. Функции Коломбо. В этом случае $E=\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, $\mathcal{E}=C^\infty(\mathbf{R})$. Обозначим

$$\mathcal{B}_q=\{\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}):\ \int_{\mathbf{R}}\varphi(\lambda)\,d\lambda=1,\ \int_{\mathbf{R}}\lambda^k\varphi(\lambda)\,d\lambda=0,\ 1\leqslant k\leqslant q,\ \sup|\varphi(x)|=1\}.$$

Положим $\Phi=\mathcal{B}_1$, $I=(0,1)$. Базис фильтра $\mathcal{F}$ состоит из множеств $V_\eta=(0,\eta)$, $R_{\varphi,\epsilon}(u)=u*\varphi_\epsilon$, где $\varphi_\epsilon(x)=\dfrac{1}{\epsilon}\varphi\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)$, $\varphi\in\mathcal{B}_1$. Система полунорм в $C^\infty(\mathbf{R})$ удовлетворяет условию (1). Множество E_α состоит из функций на $\Phi\times I$, мажорируемых некоторой степенью $1/\epsilon$ для всех $\varphi\in\Phi$. Идеал H_α состоит из таких функций h, что для любого $n\in\mathbf{N}$ существует q, что для всех $\varphi\in\mathcal{B}_q$ $|h(\varphi,\epsilon)|\leqslant c\epsilon^h$.

Условия теоремы 3 на E_α и H_α в этом случае выполнены очевидным образом. Алгебра $C^\infty(\mathbf{R})$ вкладывается в $\mathcal{G}(\mathbf{R})=G_M/\mathcal{N}$ вместе с умножением, а $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ вкладывается в $\mathcal{G}(\mathbf{R})$ с помощью свертки.

2. Алгебра ультраобобщенных функций. Пусть $\alpha>1$ и

$$\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{R})=\{\varphi\in C^\infty(\mathbf{R}):\ \exists c>0\ \exists L>0,\ \sup_{x\in K}|\varphi^{(k)}(x)|\leqslant cL^k(k!)^\alpha,\ k=0,1,\dots\}$$

класс Жевре типа Румьё и $\mathcal{D}_\alpha(\mathbf{R})=\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{R})\cap\mathcal{D}(\mathbf{R})$.

Определим

$$\mathcal{B}_\infty(\mathbf{R})=\{\varphi\in S(\mathbf{R}):\ \hat\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}),\ \hat\varphi(x)=1 \text{ на } |x|\leqslant 1,\ \sup|\varphi(x)|=1\}.$$

Положим $\mathcal{E}=\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{R})$, $E=\mathcal{D}'_\alpha(\mathbf{R})$, $\Phi=\mathcal{B}_\infty$, $I=(0,1)$. Базис фильтра состоит из множеств $V_\eta=(0,\eta)$, $R_{\varphi,\epsilon}(u)=u*\varphi_\epsilon$, где $\varphi\in\mathcal{B}_\infty$. Тогда

$$G_M=\left\{F\in G(\Phi,\mathcal{E}):\ \forall k\forall\varphi\in\mathcal{B}_\infty\ \exists H\exists c>0,\ \sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\frac{d^kF(\varphi,\epsilon)}{dx^k}\right|\leqslant ce^{H/\epsilon^{1/\alpha}}\right\},$$

$$\mathcal{N}=\left\{F\in G(\Phi,\mathcal{E}):\ \forall k\forall\varphi\in\mathcal{B}_\infty\ \forall H\exists c>0,\ \sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\frac{d^kF(\varphi,\epsilon)}{dx^k}\right|\leqslant ce^{-H/\epsilon^{1/\alpha}}\right\}.$$

Отметим, что система полунорм в $\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{R})$ удовлетворяет условию (1) при $\alpha > 2$. Таким образом, алгебру $\mathcal{G}_\alpha(\mathbf{R}) = G_M / \mathcal{N}$ при $\alpha > 2$ назовем алгеброй ультраобобщенных функций. В нее вкладываются с помощью свертки ультрараспределения из $\mathcal{D}'_\alpha(\mathbf{R})$ с компактными носителями. Например, в $\mathcal{G}_\alpha(\mathbf{R})$ имеется ультраобобщенная функция

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k}{(k!)^3}.$$

3. Обобщенные функции Егорова.

Замечание. Обобщенные функции Егорова дают решение несколько иной задачи. А именно, равенство $j(uv) = j(u)j(v)$ выполняется не для всех $u, v \in \mathcal{E}$, а только для некоторой ее подалгебры $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$.

В этом случае $\mathcal{E}_0 = \mathbf{R}$, $\mathcal{E} = C^\infty(\mathbf{R})$, $E = \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Фиксируем какую-нибудь функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ такую, что $\int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(\lambda) d\lambda = 1$, $\sup |\varphi(x)| = 1$, т.е. $\varphi \in \mathcal{B}_0$. Положим $\Phi = \{\varphi\}$, $I = (0, 1)$. Базис фильтра $\mathcal{F}$ состоит из множеств $V_\eta = (0, \eta)$, $R_{\varphi,\epsilon}(u) = u * \varphi_\epsilon$. Здесь $G_M = G(\Phi, \mathcal{E})$, а $\mathcal{N}$ состоит из функций, которые на каждом компакте равны нулю для всех $\epsilon \in V$ при некотором V из $\mathcal{F}$.

4. Расширения в смысле нестандартного анализа. Пусть $\mathcal{E}$ – любая алгебра, $\Phi = \{\varphi\}$, I – произвольное бесконечное множество и $\mathcal{F}$ – произвольный нетривиальный ультрафильтр на I. Тогда при $G_M = G(\Phi, \mathcal{E})$ и $\mathcal{N}$, состоящем из функций, которые равны нулю для всех $\epsilon \in V$, при некотором V из $\mathcal{F}$, получаем расширение $\mathcal{E}$ в смысле нестандартного анализа.

В предложенной конструкции объекта $\mathcal{G}$ много степеней свободы в выборе Φ, G_M и $\mathcal{N}$, т.е. эта конструкция позволяет построить много расширений алгебры и для каждой конкретной задачи можно выбрать соответствующее задаче расширение. Например, можно построить алгебру обобщенных функций, в которой есть объект вида $u = e^\delta$, являющийся решением уравнения $u' = \delta' u$.

Авторы благодарны Ю.В. Егорову, Ю.Н. Дрожжинову и В.В. Жаринову за полезные обсуждения некоторых аспектов работы.

Белорусский государственный университет
им. В.И. Ленина
Минск

Поступило
4 XII 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987. 2. *Schwartz L.* – C.R., 1954, vol. 239, p. 847–848. 3. *Colombeau J.-F.* Elementary introduction to new generalized functions. Amsterdam: North-Holland, 1985. 4. *Егоров Ю.В.* К теории обобщенных функций – УМН, 1990, т. 45, вып. 5, с. 3–40. 5. *Девис М.* Прикладной нестандартный анализ. М.: Мир, 1980.