ОБОБЩЕННЫЙ АЛГОРИТМ AQM

О. М. Тихоненко

Ченстоховский технический университет, институт математики
Ченстохова, Польша
E-mail: oleg.tikhonenko@gmail.com

Исследуются обобщенные алгоритмы AQM. Приводятся числовые примеры вычисления характеристик систем, в которых реализуются алгоритмы AQM.

Ключевые слова: буферная память, Active Queue Management, RED, отбрасывающая функция.

ВВЕДЕНИЕ

Модели систем обслуживания с ограниченным объемом буферной памяти широко применяются при анализе современных коммуникационных и компьютерных сетей. Прежде всего сказанное относится к моделированию процессов в узлах сети, например, в концентраторах, маршрутизаторах и т.д. Одной из существенных проблем, возникающей в таких сетях, является переполнение буфера, приводящее к потере сообщений или пакетов, а также к увеличению времени их доставки. Разрешение данной проблемы путем увеличения объема буфера в свою очередь может увеличить время передачи пакетов. Одним из приемов, позволяющих уменьшить риск «насыщения» буфера, является использование алгоритмов AQM (Active Queue Management). Наиболее часто используется при этом алгоритм RED (Random Early Detection) [1]. Его идея заключается в использовании механизма управления длиной очереди с помощью так называемой отбрасывающей функции (drop function), величина которой зависит от текущего количества пакетов в очереди. Отбрасывающая функция $d(n)$ представляет собой вероятность того, что прибывающий в систему пакет будет «отброшен», т. е. исключен из системы, если в данный момент времени в системе находится n других пакетов. Сказанное означает, что, вообще говоря, с некоторой положительной вероятностью любой прибывающий пакет может быть отброшен даже в том случае, если в момент его прибытия в очереди имеется свободное место. Ясно, что в этом случае понятия буфер и очередь являются синонимами.

Конкретный вид функции $d(n)$ может быть различным. Чаще всего она представляет собой линейную функцию, возрастающую от 0 до некоторой величины $d_{\max} < 1$ на отрезке $[q_{\min}; q_{\max}]$. Если в системе в момент поступления находится меньше чем $q_{\min}$ пакетов, то прибывающий пакет допускается в систему, если же их число больше чем $q_{\max}$, то этот пакет отбрасывается с вероятностью 1. Известны также различные модификации алгоритма RED [2, 3].

Необходимо отметить, что алгоритмы AQM практически не исследованы методами теории массового обслуживания (ТМО). В данной работе предпринята попытка такого исследования, причем сами алгоритмы AQM обобщаются на тот случай, когда пакеты (или, в терминологии ТМО, требования) имеют различный объем. Тогда понятие «буфер» следует трактовать более широко, а именно, как память, в которой размещаются требования различного объема. Аргументом отбрасывающей функции в этом случае является величина свободной буферной памяти, имеющейся в момент прибытия требования. Базовым аппаратом для анализа обобщенных алгоритмов AQM является теория систем обслуживания требований случайного объема [4, 5].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим СМО $M/M/n/(\propto, V)$ [5]. Через a обозначим интенсивность входного потока требований. Каждое требование характеризуется случайным объемом ζ, функция распределения (ФР) которого $L(x) = \mathbf{P}\{\zeta < x\}$. Предположим, что время обслуживания требования ξ не зависит от его объема и распределено экспоненциально с параметром μ, т. е. $B(t) = \mathbf{P}\{\xi < t\} = 1 - e^{-\mu t}$. Обозначим через $\sigma(t)$ суммарный объем требований, находящихся в системе в момент времени t. Значение процесса $\sigma(t)$ ограничено заданной величиной (объемом памяти) V.

Пусть $y = \sigma(\tau^{-})$. Требование, поступившее в систему в момент времени τ, будет потеряно, если его объем x таков, что $x > V - y$. Введем в рассмотрение непрерывную справа неубывающую функцию $r(y)$, определенную на отрезке $[0; V]$ и такую, что $r(V) : 1$, $r(0) \geq 0$. Функция $r(y)$ представляет собой вероятность того, что поступившее требование будет допущено в систему, если непосредственно перед его появлением в системе имелось y единиц свободной памяти. Если в момент τ требование объема x поступает в систему, то оно будет допущено в систему с вероятностью $r(V - y)$ и не допущено – с вероятностью $1 - r(V - y)$. Допущенное в систему требование, тем не менее, будет потеряно, если $x > V - y$. Заметим, что если $d(x)$ – отбрасывающая функция, то $r(x) = 1 - d(x)$. Пусть $\Upsilon(t)$ – число требований в системе в момент времени t. Если поступившее в момент τ требование объема x теряется, то имеем $\eta(\tau)=\eta(\tau^-)$, $\sigma(\tau)=\sigma(\tau^-)$, в противном случае имеем $\eta(\tau)=\eta(\tau^-)+1$, $\sigma(\tau)=\sigma(\tau^-)+x$.

Для описанной системы найдем стационарное распределение числа требований и стационарную вероятность потери.

СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС, ОПИСЫВАЮЩИЙ ПОВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ И ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ ЕГО ФУНКЦИИ

Поведение рассматриваемой СМО описывается марковским процессом

$$(\eta(t), \zeta_i(t), i=\overline{1,\eta(t)}), \tag{1}$$

где $\zeta_i(t)$ – объем i-го требования в системе в момент t (считаем, что требования в системе нумеруются в порядке их поступления). Компоненты $\zeta_i(t)$ отсутствуют, если $\eta(t)=0$. В таком случае, очевидно, имеем $\sigma(t)=0$. В противном случае имеем $\sigma(t)=\sum_{i=1}^{\eta(t)}\zeta_i(t)$.

Процесс (1) будем характеризовать функциями, имеющими следующий вероятностный смысл:

$$P_0(t)=\mathbf{P}\{\eta(t)=0\};$$

$$G_k(y,t)dy=\mathbf{P}\{\eta(t)=k, \sigma(t)\in[y;y+dy)\},\ k=1,2,...;$$

$$P_k(t)=\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=\int_0^V G_k(y,t)\,dy,\ k=1,2,....$$

Поскольку для конечных a, V и ненулевого μ существует стационарный режим, то существуют конечные пределы

$$p_0=\lim_{t\to\infty}P_0(t)=\mathbf{P}\{\eta=0\}; \tag{2}$$

$$g_k(y)dy=\lim_{t\to\infty}G_k(y,t)dy=\mathbf{P}\{\eta=k, \sigma\in[y;y+dy)\},\ k=1,2,...; \tag{3}$$

$$p_k=\lim_{t\to\infty}P_k(t)=\mathbf{P}\{\eta=k\}=\int_0^V g_k(y)\,dy,\ k=1,2,..., \tag{4}$$

где η, σ – стационарное число требований в системе и стационарный суммарный объем соответственно.

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВВЕДЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ РЕШЕНИЕ

Легко показать, что стационарные функции (2), (3) удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$0=-ap_0r(V)L(V)+\mu p_1; \tag{5}$$

$$0=ap_0r(V)L(V)-a\int_0^V g_1(x)r(V-x)L(V-x)dx-\mu p_1+2\mu p_2; \tag{6}$$

$$0 = a\int_0^V g_{k-1}(x)r(V-x)L(V-x)dx - a\int_0^V g_k(x)r(V-x)L(V-x)dx - \\ - k\mu p_k + (k+1)\mu p_{k+1},\ k=\overline{2, n-1}. \tag{7}$$

$$0 = a\int_0^V g_{k-1}(x)r(V-x)L(V-x)dx - a\int_0^V g_k(x)r(V-x)L(V-x)dx - \\ - n\mu p_k + n\mu p_{k+1},\ k = n, n+1, \ldots . \tag{8}$$

Используя обычное обозначение $\rho = a/(n\mu)$ и обозначение

$$H_*^{(0)}(x) = 1,\ H_*^{(k)}(x) = \int_0^x H_*^{(k-1)}(x-u)dH(u),\ k = 1, 2, \ldots ,$$

для стилтьесовской свертки функции $H(x)$, решение системы уравнений (5)–(8) можно записать в виде (это можно проверить непосредственной подстановкой)

$$g_k(y)dy = \begin{cases} \dfrac{(n\rho)^k}{k!} p_0\, d[(r\cdot L)_*^{(k)}(y)],\ k = \overline{1, n-1}, \\ \dfrac{n^n \rho^k}{n!} p_0 d[(r\cdot L)_*^{(k)}(y)], \quad k = n, n+1, \ldots, \end{cases}$$

откуда с учетом соотношения (4) получаем

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{(n\rho)^k}{k!} p_0\,(r\cdot L)_*^{(k)}(V),\ k = \overline{1, n-1}, \\ \dfrac{n^n \rho^k}{n!} p_0 (r\cdot L)_*^{(k)}(V), \quad k = n, n+1, \ldots . \end{cases} \tag{9}$$

Величина p_0 определяется из условий нормировки:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(n\rho)^k}{k!}(r\cdot L)_*^{(k)}(V) + \frac{n^n}{n!}\sum_{k=n+1}^{\infty} \rho^k (r\cdot L)_*^{(k)}(V)\right]^{-1}, \tag{10}$$

где $(r\cdot L)_*^{(0)}(V) = 1$.

Вероятность потери находится из уравнения равновесия и оказывается равной

$$P = 1 - (n\rho)^{-1}\sum_{k=1}^{n-1} kp_k - \rho^{-1}\left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k\right). \tag{11}$$

Для однолинейной системы $M/M/1/(\propto, V)$, в частности, получаем

$$p_k = \rho^k p_0 (r\cdot L)_*^{(k)}(V),\ k = 1, 2, \ldots;\ p_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k (r\cdot L)_*^{(k)}(V)\right)^{-1};\ P = 1 - \frac{1 - p_0}{\rho}.$$

В качестве частного случая можем анализировать «классическую» модель, в которой поступающее требование допускается в систему с вероятностью, зависящей от количества находящихся в системе других требований при ограниченном их общем числе. Например, в случае однолинейной системы мы получаем СМО $M/M/1/m$, в которой требование допускается в систему с вероятностью $r_k = r(k) = 1 - d(k)$, где k – число имеющихся в момент прихода требований. Эта система представляет частный случай рассмотренной нами модели, если предположить, что все требования имеют единичный объем ($\zeta \equiv 1$) и $V = m+1$. Легко показать, что в рассматриваемом случае стационарное распределение числа требований в системе имеет вид:

$$p_k = \frac{\rho^k \prod_{i=0}^{k-1} r_i}{1 + \sum_{j=1}^{m+1} \rho^j \prod_{i=0}^{j-1} r_i}, \; k = \overline{0, m+1}.$$

ЧИСЛОВЫЕ ПРИМЕРЫ

Присутствие стилтьесовских сверток в соотношениях (9)–(11) не позволяет в большинстве случаев точно вычислить характеристики анализируемых систем. Однако использование формул обратного преобразования Лапласа позволяет для многих конкретных функций $r(x)$ и ФР $L(x)$ провести требуемые приближенные вычисления. Это можно сделать, например, в рамках пакета *Математика*.

Приведем здесь три числовых примера, описывающих различные варианты системы $M/M/1/(\infty, V)$. Для всех анализируемых случаев стационарное распределение числа требований в системе приведено в таблице, где у каждого конкретного случая вместе с входными характеристиками приведены соответствующие вероятности потери. Вычисления проводились с помощью пакета *Математика*.

Распределение числа требований в системе для трех вариантов исходных данных

Число требований *k*	Вероятность p_k (1)	Вероятность p_k (2)	Вероятность p_k (3)
0	0,14004	0,44799	0,49965
1	0,27694	0,31386	0,39221
2	0,27721	0,17105	0,10174
3	0,17909	0,055136	0,0059831
4	0,084259	0,010184	0,00010894
5	0,030615	0,0011160	$7{,}8474 \cdot 10^{-7}$
6	0,0089074	0,000076297	$2{,}7806 \cdot 10^{-9}$
7	0,0021272	$3{,}4202 \cdot 10^{-6}$	$2{,}4574 \cdot 10^{-11}$
8	0,00042462	$1{,}0511 \cdot 10^{-7}$	$1{,}6042 \cdot 10^{-12}$
9	0,000071863	$2{,}3191 \cdot 10^{-9}$	$7{,}8858 \cdot 10^{-14}$
10	0,000010435	$4{,}3693 \cdot 10^{-11}$	$2{,}5206 \cdot 10^{-15}$

1. Пусть $\rho = 2$, $V = 10$, объем требования распределен экспоненциально со средним значением $f^{-1} = 0{,}5$. Функцию $r(y)$ определим соотношением $r(y) = y/V$ для $0 \le y \le V$. В этом случае вероятность потери равна $P = 0{,}57002$.

2. $\rho = 0{,}7$, $V = 10$, $L(x) = 1 - e^{-x}(1 + x)$, $x > 0$ (распределение Эрланга 2-го порядка с параметром $f = 1$), $r(y) = 1 - \dfrac{(y - V)^2}{V^2}$, $0 \le y \le V$. $P = 0{,}21142$.

3. $\rho = 0{,}9$, $V = 10$, $L(x) = 1 - \dfrac{1}{2} e^{-x/2}\left(\dfrac{1}{4}x^2 + x + 2\right)$, $x > 0$ (распределение Эрланга 3-го порядка с параметром $f = 0{,}5$), $r(y) = 1 - \dfrac{(y - V)^2}{V^2}$, $0 \le y \le V$. $P = 0{,}44406$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Floyd, S.* Random early detection gateways for congestion avoidance / S. Floyd, V. Jacobson // IEEE. ACM Transactions of Networking. 1993. Vol. 1 (4). P. 397–412.

2. *Athuraliya, S.* REM: Active Queue Management / S. Athuraliya, V. H. Li, S. H. Low, Q. Yin // IEEE Network. 2001. Vol. 15 (3). P. 48–53.

3. *Feng, W.* Blue: a new class of Active Queue Management algorithms / W. Feng [at al] // U. Michigan CSE-TR-387-99. 1999.

4. *Тихоненко, О. М.* Модели массового обслуживания в системах обработки информации // О. М. Тихоненко. Минск: Университетское, 1990.

5. *Tikhonenko, O.* Metody probabilistyczne analizy systemów informacyjnych / O. Tikhonenko. Warszawa: Oficyna Wydawnicza EXIT, 2006.