

В. Г. КРОТОВ

ОЦЕНКИ ДЛЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С ГРАНИЧНЫМ ПОВЕДЕНИЕМ, И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Введение

Работа посвящена изучению граничных свойств функций из многомерных классов Харди H^p и решений некоторых краевых задач для уравнений в частных производных.

Рассматриваемые нами вопросы возникли первоначально в теории пространств Харди, одной из характерных черт которой является наличие у функций из этих пространств предельных значений почти всюду (п. в.) на границе области определения. При этом предельные значения понимаются как пределы вдоль некоторых областей подхода к границе (естественно, широких, насколько это возможно). Примерами могут служить некасательные конусы Лузина

$$\{(y, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1} : |x - y| < \beta t\}, \quad \beta > 0, \quad (1)$$

для классов Харди гармонических функций в полупространстве $\mathbb{R}_+^{N+1}$ или допустимые области Кораньи—Стейна

$$\{z \in \mathbb{C}^N : |1 - \langle z, \zeta \rangle| < \frac{\beta}{2} (1 - |z|^2)\}, \quad \beta > 1, \quad (2)$$

для классов Харди голоморфных функций в единичном шаре многомерного комплексного евклидова пространства (определения см. в разделе 3, где классы Харди рассматриваются подробно).

Целью нашей работы является рассмотрение ряда результатов, связанных со следующей задачей. Пусть функция из того или иного класса Харди обладает дополнительными свойствами гладкости. Вдоль каких областей, более широких, чем исходные, эта функция будет иметь предел п. в. на границе и каковы количественные оценки такого предельного перехода.

1. История задачи

1.1. Впервые, по-видимому, касательное поведение голоморфных функций в круге $B^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ изучал Карго [1], рассматривавший граничное поведение произведений Бляшке с нулями, удовлетворяющими условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|)^{\alpha} < \infty, \quad \alpha > 0, \quad \text{вдоль областей}$$

$$\{z \in B^1 : |z - \zeta| < \beta (1 - |z|)^{\varepsilon}\}, \quad \varepsilon > 0. \quad (3)$$

Эта работа послужила поводом для заметки Кинни [2], в которой исследовалось граничное поведение функций вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |c_n|^2 < \infty$$

вдоль областей (3).

Таким образом, в [1, 2] впервые рассматривались области (3), имеющие при $0 < \varepsilon < 1$ больший порядок контакта с границей ∂B^1 , чем классические некасательные области (3) с $\varepsilon = 1$ ((2) при $N = 1$); кроме того, эти области связывались с граничным поведением функций, на которые налагались ограничения гладкости (по существу, в терминах дробного интегрирования). Мы не будем приводить результатов из [1, 2], так как они формулируются в терминах емкостей, нас же в этой работе интересуют вопросы, связанные с мерой и шкалой пространств L^p .

1.2. В приведенной нами постановке задача впервые рассматривалась Нагелем, Рудиным и Шапиро [3], которые изучали граничное поведение свертков вида $f * K * P_t$, где $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $p \geq 1$, $K \in L^1(\mathbb{R}^N)$ — радиальное монотонное ядро, $P_t(x) = t(|x|^2 + t^2)^{-(N+1)/2}$ — ядро Пуассона полупространства $\mathbb{R}_+^{N+1}$. Мы приведем наиболее интересные примеры из работы [3] в эквивалентных терминах пространства $H^p(\mathbb{R}_+^{N+1})$ — при $p > 1$ гармоническая функция $u \in H^p(\mathbb{R}_+^{N+1})$ тогда и только тогда, когда $u(x, t) = f * P_t(x)$ с некоторой функцией $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ [4, с. 167]. Пусть

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varepsilon}(x) &= \{(y, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1} : |x - y| \leq \beta \max(t^{\varepsilon}, t)\}, \\ N_{\varepsilon}u(x) &= \sup \{|u(y, t)| : (y, t) \in \Gamma_{\varepsilon}(x)\} \end{aligned} \quad (4)$$

и J_{α} — ядро Бесселя [5, с. 155]; отметим для дальнейшего, что

$$u(\cdot, t) * J_{\alpha}(x) = \int_0^{\infty} B_{\alpha}(s) u(x, t + s) ds, \quad (5)$$

где $u \in H^p(\mathbb{R}_+^{N+1})$ и функция B_{α} удовлетворяет оценкам

$$B_{\alpha}(s) = O(s^{\alpha-1}), \quad s \rightarrow 0; \quad B_{\alpha}(s) = O(e^{-s^2}), \quad s \rightarrow \infty \quad (6)$$

Т е о р е м а 1 [3]. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < N/p$ и $u \in H^p(\mathbb{R}_+^{N+1})$. Тогда

$$\|N_{\varepsilon}(J_{\alpha} * u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq c \|N_1 u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad \varepsilon = 1 - \alpha p / N \quad (7)$$

и $J_{\alpha} * u$ п. в. на $\mathbb{R}^N$ имеет предел вдоль областей $\Gamma_{\varepsilon}(x)$.

Аналогичный результат получен в [3] и для $\alpha p = N$, в этом случае области $\Gamma_{\varepsilon}(x)$ надо заменить областями

$$\left\{ (y, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1} : |x - y| < \beta \max \left(\left(\ln \frac{e}{t} \right)^{-\eta}, t \right) \right\}, \quad \eta = \frac{p-1}{N}.$$

При $\alpha p > N$ $J_{\alpha} * u$ непрерывно продолжается на $\mathbb{R}_+^{N+1}$, если $u \in H^p(\mathbb{R}_+^{N+1})$.

1.3. В [3] показано также, что теорема 1 теряет силу даже в части сходимости п. в. при замене областей $\Gamma_{\varepsilon}(x)$ любыми областями вида

$$\{(y, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1} : |x - y| < \varphi(t)\}, \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{t^{\varepsilon}}{\varphi(t)} = 0.$$

Таким образом, теорема 1 имеет любопытную особенность — максимальный оператор, ассоциированный с оптимальными областями, удовлетворяет неравенству сильного типа (7). Казалось бы, в такой ситуации должно выпол-

няться только неравенство слабого типа

$$m \{x \in R^N : N_\varepsilon (J_\alpha * u)(x) > \lambda\} \leq c \left(\frac{1}{\lambda} \|N_1 u\|_{L^p(R^N)} \right) \quad \lambda > 0.$$

(m — мера Лебега на R^N), которое, по существу, эквивалентно части теоремы 1, относящейся к сходимости п.в. Именно это неравенство и доказано сначала в [3], а затем с помощью L^p -неравенств для емкостей из него выводилось (7). Отметим, что такой подход неприменим для случая $0 < p \leq 1$.

1.4. Другой пример, приведенный в [3], связан с дробными интегралами Коши в единичном круге B^1 . Пусть

$$(1-x)^{-\alpha-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n, \quad 0 \leq x < 1, \quad \alpha > -1, \quad (8)$$

$$C_\alpha f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{-\alpha} c_n z^n, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

$$M_\varepsilon f(\zeta) = \sup \{ |f(z)| : |z - \zeta| < \beta (1 - |z|)^\varepsilon \}, \quad \zeta \in \partial B^1.$$

Т е о р е м а 2 [3]. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \alpha p < 1$ и $f \in H^p(B^1)$. Тогда

$$\|M_\varepsilon(C_\alpha f)\|_{L^p(\partial B^1)} \leq c \|M_1 f\|_{L^p(\partial B^1)}, \quad \varepsilon = 1 - \alpha p.$$

На самом деле в [3] рассматривались операторы

$$F \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - e^{-it} z)^{\alpha-1} F(t) dt, \quad F \in L^p[-\pi, \pi], \quad p > 1,$$

но из (8) ясно, что изучение этого оператора равносильно изучению C_α на $H^p(B^1)$, $p > 1$. Многомерные аналоги таких операторов в [3] не рассматривались.

1.5. Следующий шаг был сделан Нагелем и Стейном [6], распространившими теорему 1 на случай $0 < p \leq 1$. При этом они действовали методом, совершенно отличным от применявшегося в [3]. Именно, в [6] изучались максимальные операторы вида

$$N_{\varepsilon, \nu} u(x) = \sup \{ t^\alpha |u(y, t)| : |x - y| < t^\varepsilon, \quad t < 2^{-\nu/(1-\varepsilon)} \},$$

где $\nu = 0, 1, \dots$. Сначала в [6] доказывалось неравенство

$$\|N_{\varepsilon, 0} u\|_{L^p(R^N)} \leq c \|N_1 u\|_{L^p(R^N)}, \quad \varepsilon = 1 - \alpha p/N > 0, \quad (9)$$

которое основано на атомических разложениях для тенет-пространств из [7]. Затем с использованием сверточной структуры функций из $H^p(R_+^{N+1})$ и растяжений R^N из (9) выводилось неравенство

$$\|N_{\varepsilon, \nu} u\|_{L^p(R^N)} \leq c 2^{-\nu N/p} \|N_1 u\|_{L^p(R^N)}, \quad \varepsilon = 1 - \alpha p/N, \quad (10)$$

(c не зависит от u и ν). После этого $J_\alpha * u$ в виде (5) изучался с помощью стандартных двоичных разбиений

$$J_\alpha * u(x, t) = \left[\int_0^t + \sum_{2^{\nu t}}^{2^{\nu+1}t} \int + \int_1^\infty \right] B_\alpha(s) u(x, t+s) ds,$$

и основным моментом было применение неравенств (10) к среднему слагаемому.

Таким образом, если учесть, что атомические разложения из [7] основаны лишь на теореме разложения Уитни (см., например, [5, с. 199]), то методы работы [6] носят более прямой метрический характер. Тем не менее эти ме-

тоды существенно связаны с алгебраической структурой как функций, так и их области определения.

1.6. Метод работы [6] использовался затем в [8] для доказательства оценок вида (9) в контексте пространств однородного типа (см. раздел 2), но новые интегральные операторы в [8] не рассматривались, так как переход от (9) к (10) осуществлялся как и в [6].

Укажем еще на статью [9], в которой результаты из [3] распространялись на более широкие классы, чем $J_\alpha(L^p(\mathbb{R}^N))$. В идейном отношении эта работа близка к [3].

2. Общие оценки для сглаживающих операторов

В этом разделе мы дадим, в частности, прямое доказательство оценок вида (10), основанное исключительно на геометрических идеях, которое не связано со специальной алгебраической структурой функции и ее области определения (см. п. 2.9 ниже). Это позволяет доказывать точные оценки для достаточно общих одномерных сглаживающих интегральных операторов в абстрактном полупространстве или шаре, построенном на пространстве однородного типа. В последующих разделах мы укажем ряд приложений этих оценок к пространствам Харди в областях в $\mathbb{C}^N$ (раздел 3). В частности, мы получим многомерный аналог теоремы 2. В разделе 4 изучается граничное поведение решений некоторых краевых задач для уравнений в частных производных в липшицевых и C^1 -областях в $\mathbb{R}^N$.

2.1. Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, топология которого задается квазиметрикой d . Это означает, что функция $d: X^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\Leftrightarrow x = y; & d(x, y) &\leq ad(y, x); \\ d(x, z) &\leq a[d(x, y) + d(y, z)] \end{aligned}$$

для любых $x, y, z \in X$ (постоянная $a \geq 1$ не зависит от выбора элементов X) и множество открытых шаров

$$B(x, t) = \{y \in X : d(x, y) < t\}$$

образует базу окрестностей топологии X .

Пусть еще на X задана положительная борелевская мера μ , удовлетворяющая условию удвоения

$$\mu(B(x, 2t)) \leq b\mu(B(x, t))$$

при всех $x \in X$ и $t \in (0, 1]$ (постоянная $b \geq 1$ не зависит от x и t). Это условие нам будет удобно записывать в виде

$$\mu(B(x, st)) \leq cs^\gamma \mu(B(x, t)), \quad x \in X, \quad 0 < t \leq 1/s \leq 1 \quad (11)$$

(можно взять $c = b$ и $\gamma = \log_2 b$). Значение постоянной γ важно для дальнейшего. Считаем еще, что всюду $\mu(B(x, 1)) \geq C > 0$.

2.2. По терминологии [10] (X, d, μ) — пространство однородного типа. Мы не будем пользоваться теорией таких пространств, за исключением следующего утверждения, которое, впрочем, доказывается так же, как и в евклидовом случае (см., например, [5, с. 20]).

Л е м м а. *Существует постоянная $c > 0$ такая, что для любого измеримого множества $E \subset X$ и любого покрытия $\{B_j\}$ этого множества шарами ограниченного радиуса существует не более чем счетная совокупность $\{B_j\} \subset$*

$\subset \{B\}$ со свойствами

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \neq j), \quad \mu(E) \leq c \sum_j \mu(B_j).$$

2.3. Рассмотрим произведение $X \times (0, 1]$, и для каждой точки $x \in X$ выделим в этом произведении область подхода к границе

$$\Gamma_\varepsilon(x) = \{(y, t) \in X \times (0, 1] : d(x, y) < t^\varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0. \quad (12)$$

Семейство областей (12) естественным образом порождает понятие Γ_ε -предела. Введем еще максимальные операторы

$$\mathcal{M}_\varepsilon u(x) = \sup \{|u(y, t)| : (y, t) \in \Gamma_\varepsilon(x)\}. \quad (13)$$

Иногда в определениях (12) и (13) надо будет ограничиваться значениями $t \in (0, \delta]$, где $\delta \in (0, 1]$ — фиксированное число. Соответствующие области и операторы обозначаем тогда $\Gamma_{\varepsilon, \delta}(x)$ и $\mathcal{M}_{\varepsilon, \delta}(x)$.

2.4. Пусть $K \in L^1[0, 1]$ и

$$\mathcal{K}u(x, t) = \int_0^{1/2} K(s) u(x, t+s) ds. \quad (14)$$

Мы будем рассматривать ниже только непрерывные функции на $X \times (0, 1]$, так что интеграл в (14) всегда будет иметь смысл.

Для наших приложений вполне достаточно рассмотрения ядер K , удовлетворяющих условию

$$\int_0^t |K(s)| ds \leq ct^\alpha, \quad 0 < t \leq 1, \quad (15)$$

с некоторыми постоянными $c > 0$ и $\alpha > 0$, не зависящими от t . В таком случае $\mathcal{K}$ является сглаживающим оператором, что подтверждается неравенством

$$\|\mathcal{M}_{1, 1/2}(\mathcal{K}u)\|_{L^q(X)} \leq c \|\mathcal{M}_1 u\|_{L^p(X)}, \quad 1/q = 1/p - \alpha/\gamma. \quad (16)$$

2.5. Теперь мы готовы к формулировке основного результата нашей работы.

Т е о р е м а 3. Пусть $0 < p < \infty$, выполнены условия (14) и (15), причем $0 < \alpha p < \gamma$. Тогда для любых $u \in C(X \times (0, 1])$ и $\varepsilon \in [1 - \alpha p/\gamma, 1]$

$$\|\mathcal{M}_{\varepsilon, 1/2}(\mathcal{K}u)\|_{L^q(X)} \leq c \|\mathcal{M}_1 u\|_{L^p(X)}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{pe} \left(1 - \frac{\alpha p}{\gamma}\right). \quad (17)$$

Если дополнительно $\mathcal{M}_1 u \in L^p(X)$, то $\mathcal{K}u$ п. в. на X имеет $\Gamma_{1-\alpha p/\gamma}$ -предел.

Можно показать, что утверждение теоремы 3 является точным. Во-первых, условия (14) и (15) нельзя ослабить, сохраняя тот же вывод. Во-вторых, области $\Gamma_\varepsilon(x)$ с указанным ε и соответствующие показатели q являются оптимальными. Наконец, нельзя утверждать существования предела вдоль любых более широких областей, чем указано в теореме. Мы не будем останавливаться на точных формулировках. Ниже будет видно (см., например, теорему 10 в п. 4.12), что и в конкретных приложениях следствия из теоремы 3 носят окончательный характер.

2.6. В случае, когда X — компактное пространство (см. п. 2.1), полезен другой вариант теоремы 3, состоящий в замене $(0, 1]$ с операцией сложения на $[0, 1]$ с операцией умножения. Для этого надо изменить (12) и (14), (15)

соответственно на

$$\Gamma_\varepsilon(x) = \{(y, t) \in X \times [0, 1] : d(x, y) < (1 - t)^\varepsilon\}, \quad (12')$$

$$\mathcal{K}u(x, t) = \int_0^1 K(s) u(x, ts) ds, \quad (14')$$

$$\int_{1-t}^1 |K(s)| ds \leq ct^\alpha, \quad t \in (0, 1]. \quad (15')$$

В таких терминах теорема 3 сохраняет силу. Этот вариант удобен при работе со звездными областями в действительном или комплексном евклидовом пространстве.

2.7. Пусть $0 < \delta \leq 1/2$ и

$$\mathcal{K}_\delta u(x, t) = \int_0^\delta K(s) u(x, t + s) ds$$

и, если множество $F \subset X$, то обозначим $F[\delta] = \bigcup_{x \in F} B(x, \delta)$.

Теорема 4. Пусть p и K удовлетворяют условиям теоремы 3, $F \subset X$ — измеримое множество. Тогда для любой функции $u \in C(X \times (0, 2\delta])$ и

$$\varepsilon \in \left[1 - \frac{\alpha p}{\gamma}, 1\right]$$

$$\|\mathcal{M}_{\varepsilon, \delta}(\mathcal{K}_\delta u)\|_{L^q(F)} \leq c \|\mathcal{M}_{1, 2\delta} u\|_{L^p(F[(\alpha+1)\delta^\varepsilon])}$$

(с не зависит от u и F), $\frac{1}{q} = \frac{1}{pe} \left(1 - \frac{\alpha p}{\gamma}\right)$.

Это утверждение показывает, что теорема 3 имеет локальный характер.

2.8. Приведенные теоремы 3 и 4 могут трактоваться как утверждения об ограниченности операторов в некоторых функциональных пространствах, определяемых принадлежностью к L^p максимального оператора, ассоциированного с некоторым семейством областей подхода к границе (см. (12) и (13)). Например, естественно рассмотреть пространство функций $u \in C(X \times (0, 1])$, для которых $\mathcal{M}_\varepsilon u \in L^p(X)$, а также выделить в нем подпространство функций, п. в. имеющих Γ_ε -предел. В случае $X = \mathbb{R}^N$, $d(x, y) = |x - y|$ (евклидова норма) такое пространство изучалось по другому поводу в [7]. Такие пространства полезны и в других вопросах, например, в связи с дифференциальными свойствами граничных функций [11]. Мы надеемся в дальнейшем изложить общую схему построения семейств областей подхода к границе (не связанную с пространствами однородного типа) и классов функций, определяемых принадлежностью к L^p соответствующего максимального оператора.

2.9. Доказательство теоремы 3. Рассмотрим сначала основной случай $\varepsilon = 1 - \alpha p/\gamma$. Для этого введем вспомогательную максимальную функцию

$$m_\nu^{(\alpha)}(x) = \sup \{t^\alpha | u(y, t) | : d(x, y) < (2^{-\nu}t)^\varepsilon, t < 2^{-\nu\varepsilon/(1-\varepsilon)} \equiv \delta_\nu\}.$$

Для $\lambda > 0$ положим

$$E^\alpha(\lambda) = \{x \in X : m_\nu^{(\alpha)}(x) > \lambda\}.$$

Пусть, далее, натуральное число k_ν определяется из условия $2^{-k_\nu-1} < \delta_\nu \leq 2^{-k_\nu}$. Обозначим

$$E_k^\alpha(\lambda) = \{x \in E^\alpha(\lambda) : 2^{-k-1} < t_\alpha(x) \leq 2^{-k}\}, \quad k \geq k_\nu,$$

где

$$t_\alpha(x) = \sup \{t < \delta_\nu : \exists y d(x, y) < (2^{-\nu}t)^\varepsilon, t^\alpha | u(y, t) | > \lambda\}.$$

Нетрудно убедиться в измеримости множеств $E_k^\alpha(\lambda)$, $k \geq k_v$, а также в том, что

$$E_k^\alpha(\lambda) \cap E_i^\alpha(\lambda) = \emptyset, \quad \bigcup_{k=k_v}^{\infty} E_k^\alpha(\lambda) = E^\alpha(\lambda). \quad (18)$$

Далее вводим обозначения

$$E^0(\lambda) = \{x \in X : m_0 u(x) > \lambda\},$$

$$E_k^0(\lambda) = \{x \in E^0(\lambda) : 2^{-k-1} < t_0(x) \leq 2^{-k}\}, \quad k \geq k_v.$$

где

$$m_0 u(x) = \sup \{ |u(y, t)| : d(x, y) < t/4a^2, t \leq \delta_v \},$$

$$t_0(x) = \sup \{ t < \delta_v : \exists y \quad d(x, y) < t/4a^2, |u(y, t)| > \lambda \}.$$

Тогда (18) выполнено при $\alpha = 0$.

Для оценки $\mu(E_k^\alpha(\lambda))$ возьмем произвольно $x \in E_k^\alpha(\lambda)$ и найдем $y \in X$ и $t \in (2^{-k-1}, 2^{-k})$, для которых будет $d(x, y) < (2^{-v}t)^e$ и $t^\alpha |u(y, t)| > \lambda$. Обозначим через $B_x = B(y, (2^{-v}t)^e)$, тогда семейство $\{B_x : x \in E_k^\alpha(\lambda)\}$ образует покрытие множества $E_k^\alpha(\lambda)$, так как $x \in B_x$. В силу леммы из п. 2.2 из этого покрытия можно выделить не более чем счетное подсемейство $B_{x_j} \equiv B(y_j, (2^{-v}t_j)^e)$, $j \geq 1$, со свойствами

$$B_{x_j} \cap B_{x_i} = \emptyset, \quad \mu(E_k^\alpha(\lambda)) \leq c \sum_j \mu(B_{x_j}).$$

Обозначим через $k_e = \left[\frac{2}{e} \log_2 2a \right] + 1$ и покажем, что при $k \geq k_e + k_v$

$$B_{x_j}^* \equiv B(y_j, a^{-2}2^{-k-3}) \subset \bigcup_{i=k-k_e}^k E_i^0(2^{\alpha k} \lambda), \quad j \geq 1.$$

В самом деле, пусть $x \in B_{x_j}^*$, и точка (z, τ) такова, что

$$d(x, z) < \tau/4a^2, \quad 2^{k_e-k} < \tau \leq \delta_v.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d(x_j, z) &\leq a^2 [d(x_j, y_j) + d(y_j, x) + d(x, z)] \leq \\ &\leq a^2 [(2^{-v}t_j)^e + a^{-2}2^{-k-3} + \tau/4a^2]. \end{aligned}$$

Но так как $\tau \leq \delta_v$, то $\tau \leq (2^{-v}\tau)^e$, кроме того, из $\tau > 2^{k_e-k}$ следует $(2^{-v}t_j)^e < \frac{1}{4a^2} (2^{-v}\tau)^e$, поэтому $d(x_j, z) < (2^{-v}\tau)^e$. В силу того, что $x_j \in E_k^\alpha(\lambda)$ и $\tau \leq \delta_v$, отсюда вытекает $|u(z, \tau)| \leq \tau^{-\alpha} \leq 2^{\alpha k} \lambda$. Это означает, что $x \notin E_i^0(2^{\alpha k} \lambda)$ при всех $i < k - k_e$. С другой стороны, из соотношений $t_j > 2^{-k-1}$, $d(x, y_j) < \frac{t_j}{4a^2}$ и $|u(y_j, t_j)| > 2^{\alpha k} \lambda$ видим, что $x \notin E_i^0(2^{\alpha k} \lambda)$ при $i > k$. Тем самым наше включение доказано.

Шары $B_{x_j}^*$ попарно не пересекаются (они лежат в непересекающихся шарах B_{x_j}), следовательно, из (11), (18), и из доказанного включения получаем

$$\begin{aligned} \mu(E_k^\alpha(\lambda)) &\leq c \sum_j \mu(B_{x_j}) \leq c \sum_j \left[\frac{4a^2 (2^{-v-k})^e}{2^{-k}} \right]^v \mu(B_{x_j}^*) = \\ &\leq c 2^{\alpha p k - e v} \mu \left(\bigcup_j B_{x_j}^* \right) \leq 2^{\alpha p k - e v} \mu \left(\bigcup_{i=k-k_e}^k E_i^0(2^{\alpha k} \lambda) \right). \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения, но с упрощениями, показывают справедливость соотношения¹

$$\mu \left(\bigcup_{k=v_v}^{k_v+k_e-1} E_k^\alpha(\lambda) \right) \leq c 2^{\alpha p k_v - \varepsilon \gamma v} \mu \left(\bigcup_{k=k_v}^{k_v+k_e-1} E_k^0(2^{\alpha k_v} \lambda) \right).$$

Для этого надо, как и выше, покрыть часть множества из левой части непересекающимися шарами $B(y_j, (2^{-v} t_j)^\varepsilon)$, где $2^{-k_v - k_e} < t_j \leq \delta_v$, тогда непересекающиеся шары $B(y_j, t_j)$ содержатся во множестве из правой части.

Теперь, используя последние два неравенства и тождество

$$\int_X |f|^p d\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu \{x \in X : |f(x)| > \lambda\} d\lambda,$$

можно показать, что

$$\|m_v^{(\alpha)} u\|_{L^p(X)} \leq c 2^{v(\alpha - \gamma/p)} \|m_0 u\|_{L^p(X)}, \quad (19)$$

где постоянная c не зависит от u и v . В самом деле,

$$\begin{aligned} \|m_v^{(\alpha)} u\|_{L^p(X)}^p &\leq c \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{\alpha p m} \mu(E^\alpha(2^{\alpha m})) \leq \\ &\leq c \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{\alpha p m} \left[\mu \left(\bigcup_{k=k_v}^{k_v+k_e-1} E_k^\alpha(2^{\alpha m}) \right) + \sum_{k=k_v+k_e}^{\infty} \mu(E_k^\alpha(2^{\alpha m})) \right] \leq \\ &\leq c 2^{-\varepsilon \gamma v} \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{\alpha p m} \left[2^{\alpha p k_v} \mu \left(\bigcup_{k=k_v}^{k_v+k_e-1} E_k^0(2^{\alpha(m+k_v)}) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=k_v+k_e}^{\infty} 2^{\alpha p k} \sum_{i=k-k_e}^k \mu(E_i^0(2^{\alpha(m+k)})) \right] \leq \\ &\leq c 2^{-\varepsilon \gamma v} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=k_v}^{\infty} 2^{\alpha p(m+k)} \mu(E_k^0(2^{\alpha(m+k-k_e)})) = c 2^{-\varepsilon \gamma v} \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{\alpha p m} \mu(E^0(2^{\alpha(m-k_e)})) \leq \\ &\leq c 2^{-\varepsilon \gamma v} \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(E^0(\lambda 2^{-\alpha k_e})) d\lambda \leq c 2^{-\varepsilon \gamma v} \|m_0 u\|_{L^p(X)}^p \end{aligned}$$

и (19) доказано.

Далее заметим, что

$$\sup_{d(x,y) < t^\varepsilon, t < 1/2} \left| \int_{t^\varepsilon - t}^{1/2} K(s) u(y, t+s) ds \right| \leq c \mathcal{M}_1 u(x), \quad (20)$$

так как при $s \in [t^\varepsilon - t, 1/2]$ будет $d(x, y) < t^\varepsilon < t + s$.

Используя (19) и (20), докажем теперь основное неравенство (17) при $\varepsilon = 1 - \alpha p / \gamma$. Пусть $(y, t) \in \Gamma_{\varepsilon, 1/2}^+(x)$, определим тогда n из условия $2^n t < t^\varepsilon \leq 2^{n+1} t$ и с помощью (15) выводим

$$\begin{aligned} \int_{t^\varepsilon}^{t^\varepsilon} |K(s-t) u(y, s)| ds &\leq \sum_{v=0}^n \int_{2^v t}^{2^{v+1} t} |K(s-t) u(y, s)| ds \leq \\ &\leq c \sum_{v=0}^n \int_{2^v t}^{2^{v+1} t} |K(s-t)| (2^{-v} t)^{-\alpha} m_v^{(\alpha)} u(x) ds \leq \\ &\leq c t^{-\alpha} \sum_{v=0}^n 2^{\alpha v} m_v^{(\alpha)} u(x) \int_0^{2^{v+1} t} |K(s)| ds \leq c \sum_{v=0}^{\infty} m_v^{(\alpha)} u(x). \end{aligned}$$

Отсюда и из (20) получаем

$$\mathcal{M}_{\varepsilon, 1/2}(\mathcal{K}u)(x) \leq c \left\{ \mathcal{M}_1 u(x) + \sum_{v=0}^{\infty} m_v^{(\alpha)} u(x) \right\}, \quad x \in X.$$

Теперь ясно, что (17) при $\varepsilon = 1 - \alpha p / \gamma$ вытекает непосредственно из (19) и условия $\alpha p < \gamma$.

Для $\varepsilon \in (1 - \alpha p / \gamma, 1)$ неравенство (17) получается комбинированием случаев $\varepsilon = 1 - \alpha p / \gamma$ и $\varepsilon = 1$ (см. (16)). Основная идея состоит в факторизации оператора $\mathcal{K}$:

$$\left| \int_0^{1/2} K(s) u(x, t+s) ds \right| \leq \int_0^{1/2} |K(s)| s^{-\beta} ((s+t)^\beta |u(x, t+s)|) ds,$$

где $\beta = \gamma/p (1 - \varepsilon) \in (0, \alpha)$. Пусть $v(x, t) = t^\beta |u(x, t)|$, $K_\beta(s) = |K(s)| s^{-\beta}$,

$$\mathcal{K}_\beta v(x, t) = \int_0^{1/2} K_\beta(s) v(x, t+s) ds.$$

Так как в силу (15)

$$\int_0^t K_\beta(s) ds = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}t}^{2^{-k}t} s^{-\beta} |K(s)| ds \leq ct^{-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\beta} \int_0^{2^{-k}t} |K(s)| ds \leq ct^{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(\beta-\alpha)},$$

то ядро K_β удовлетворяет условию (15) с $\alpha - \beta$ вместо α . Поэтому согласно (16)

$$\|\mathcal{M}_{\varepsilon, 1/2}(\mathcal{K}u)\|_{L^q(X)} \leq \|\mathcal{M}_{\varepsilon, 1/2}(\mathcal{K}_\beta v)\|_{L^q(X)} \leq c \|\mathcal{M}_\varepsilon v\|_{L^p(X)},$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha - \beta}{\gamma(1 - \beta p / \gamma)}.$$

Точнее, мы применяли неравенство (16), в котором вместо $\mathcal{K}$ надо взять $\mathcal{K}_{\beta*}$ а максимальный оператор определен квазиметрикой $d^\varepsilon(x, y)$. Далее применяем неравенство (19) с $v = 0$, получая

$$\|\mathcal{M}_{\varepsilon, 1/2}(\mathcal{K}u)\|_{L^q(X)} \leq c \|\mathcal{M}_\varepsilon v\|_{L^p(X)} \leq c \|\mathcal{M}_1 u\|_{L^p(X)}.$$

Осталось заметить, что

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha - \frac{\gamma}{p}(1 - \varepsilon)}{\gamma\varepsilon} = \frac{1}{p\varepsilon} \left(1 - \frac{\alpha p}{\gamma} \right).$$

Теорема 3 доказана. Ясно также, какие изменения следует сделать в приведенном доказательстве для обоснования теоремы 4.

§3. Граничные свойства гладких функций из H^p

3.1. Классы Харди $H^p(\mathbf{R}_+^{N+1})$, $0 < p < \infty$, состоят из гармонических в $\mathbf{R}_+^{N+1}$ функций u , для которых

$$\|u\|_{H^p(\mathbf{R}_+^{N+1})} \equiv \|N_1 u\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} < \infty,$$

где $N_1 u$ определяется в (4) при $\varepsilon = 1$. Имеется ряд других эквивалентных определений этих классов [4].

Из (5) и (6) видно, что теорема 1 (без ограничения $p > 1$) может быть выведена из теоремы 3. Более того, если $0 < \alpha p < N$, то для любых $u \in$

$\in H^p(\mathbf{R}_+^{N+1})$ и $\varepsilon \in [1 - \alpha p/N, 1]$

$$\|N_\varepsilon(J_\alpha * u)\|_{L^q(\mathbf{R}^N)} \leq c \|u\|_{H^p(\mathbf{R}_+^{N+1})}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p\varepsilon} \left(1 - \frac{\alpha p}{N}\right).$$

3.2. Другой вариант пространств $H^p(\mathbf{R}_+^{N+1})$ связан уравнением теплопроводности. Пусть S' — класс распределений медленного роста [12, с. 30]. Для $u \in H^p(\mathbf{R}_+^{N+1})$ существует граничное распределение $u(\cdot, t) \rightarrow f \in S'$ при $t \rightarrow +0$ (в смысле S') [4]. Класс всех граничных распределений обозначим через $H^p(\mathbf{R}^N)$,

$$\|f\|_{H^p(\mathbf{R}^N)} = \|u\|_{H^p(\mathbf{R}_+^{N+1})}.$$

Кроме того, для натурального k положим

$$H_k^p(\mathbf{R}^N) = \{f \in H^p(\mathbf{R}^N) : \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{H^p(\mathbf{R}^N)} \equiv \|f\|_{H_k^p(\mathbf{R}^N)} < \infty\}$$

(производные понимаются в смысле распределений).

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u, \quad u(\cdot, t) \xrightarrow{S'} f \in H^p(\mathbf{R}^N). \quad (21)$$

Пусть $\varphi(x) = \exp(-1/4 |x|^2)$, $\varphi_t(x) = t^{-N} \varphi(x/t)$, $t > 0$. Если $f \in H^p(\mathbf{R}^N)$, то свертка $f * \varphi_t(x)$ удовлетворяет условию $N_1(f * \varphi_t) \in L^p(\mathbf{R}^N)$ [4] и $f * \varphi_{\sqrt{t}}(x)$ является решением задачи (21). Если дополнительно $f \in H_k^p(\mathbf{R}^N)$, $0 < kp < N$, то теорема 3 дает следующие оценки для граничного поведения этого решения

$$\|N_\varepsilon(f * \varphi_{\sqrt{t}})\|_{L^q(\mathbf{R}^N)} \leq c \|f\|_{H_k^p(\mathbf{R}^N)}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2p\varepsilon} \left(1 - \frac{kp}{N}\right),$$

где $\varepsilon \in \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{kp}{N}\right), \frac{1}{2}\right]$.

3.3. Подобно пространствам

$$H_{\text{heat}}^p(\mathbf{R}_+^{N+1}) = \{u = f * \varphi_t : f \in S', N_1 u \in L^p(\mathbf{R}^N)\}$$

определяются параболические пространства Харди, введенные Кальдероном и Торчинским [13], которые связаны с вырождающимися параболическими уравнениями — основное изменение состоит в замене $N_1 u$ на максимальный оператор, ассоциированный с другой, вообще говоря, неизотропной метрикой на $\mathbf{R}^N$. К этому классу пространств также применимы результаты раздела 2.

3.4. Рассмотрим пространства Харди $H^p(B^N)$. При этом мы придерживаемся стандартных векторных обозначений из [14]. Пусть

$$B^N = \{z \in \mathbf{C}^N : |z| < 1\}$$

— единичный шар в $\mathbf{C}^N$, ∂B^N — его граница и σ — поверхностная мера на ∂B^N . Классы $H^p(B^N)$, $0 < p < \infty$, состоят из голоморфных в B^N функций f , для которых

$$\|f\|_{H^p(B^N)} \equiv \sup_{0 < r < 1} \left(\int_{\partial B^N} |f(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \right)^{1/p} < \infty.$$

Положим для $\varepsilon > 0$

$$D_\varepsilon(\xi) = \{z \in B^N : |1 - \langle z, \xi \rangle| < \beta(1 - |z|^2)^\varepsilon\}, \quad \xi \in \partial B^N,$$

тогда $D_1(\xi)$ — допустимые области Кораньи — Стейна (2). Пусть еще

$$M_\varepsilon f(\xi) = \sup \{|f(z)| : z \in D_\varepsilon(\xi)\}.$$

Если $f \in H^p(B^N)$, $0 < p < \infty$, то [14, с. 94]

$$\|M_1 f\|_{L^p(\partial B^N)} \leq c \|f\|_{\tilde{H}^p(B^N)} \quad (22)$$

(с не зависит от f).

Неизотропная квазиметрика $d(\zeta, \zeta') = |1 - \langle \zeta, \zeta' \rangle|$ на ∂B^N порождает семейство шаров

$$B(\zeta, t) = \{\zeta' \in \partial B^N: d(\zeta, \zeta') < t\},$$

которые связаны с мерой σ неравенствами [14, с. 74]

$$c_1 t^N \leq \sigma(B(\zeta, t)) \leq c_2 t^N, \quad \zeta \in \partial B^N, \quad t \in (0, 2),$$

поэтому условие (11) выполнено с $\gamma = N$. Если мы будем отождествлять точки $(\zeta, t) \in \partial B^N \times [0, 1]$ и $t\zeta \in B^N$ (то, что началу координат в B^N соответствует множество $(\zeta, 0)$, $\zeta \in \partial B^N$, не приводит к недоразумениям), то области (12') в существенном совпадают с областями $D_\varepsilon(\zeta)$. Таким образом, мы имеем возможность применять вариант теоремы 3 из п. 2.6. Рассмотрим конкретные примеры операторов.

3.5. Если f голоморфна в B^N , то она допускает разложение по однородным многочленам [14, с. 27]

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(z)$$

Рассмотрим оператор дробного интегрирования

$$R_\alpha f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} F_m(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(sz) ds.$$

Из теоремы 3 (см. также п. 2.6) вытекает

Т е о р е м а 5. Пусть $0 < p < N/\alpha$. Тогда для любых $f \in H^p(B^N)$

$$\|M_\varepsilon(R_\alpha f)\|_{L^q(\partial B^N)} \leq c \|f\|_{H^p(B^N)}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p\varepsilon} \left(1 - \frac{\alpha p}{N}\right),$$

$\varepsilon \in [1 - \alpha p/N, 1]$, и $R_\alpha f$ п. в. имеет $D_{1-\alpha p/N}$ -предел.

Теорема 5 (и все, сказанное ниже об R_α) сохраняет силу и для каждого из операторов

$$\tilde{R}_\alpha f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{-\alpha} F_m(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\alpha-1} f(sz) ds, \quad \alpha > 0,$$

$$C_\alpha f(z) = \int_{\partial B^N} \frac{f^*(\xi) d\sigma(\xi)}{(1 - \langle z, \xi \rangle)^{N-\alpha}} = \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(N-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{N-\alpha-1} f(sz) ds,$$

$0 < \alpha < N$. В последнем случае f^* — граничная функция для $f \in H^p(B^N)$ (при $p < 1$ f^* — граничное распределение и интеграл по ∂B^N следует понимать в смысле обобщенных функций). В частности, теорема 5 с C_α вместо R_α дает прямое многомерное обобщение теоремы 2, охватывающее значения $p \in (0, 1]$

В предельном случае $\alpha p = N$ следует различать две возможности. Если $p = N/\alpha > 1$, то $R_\alpha f$ п. в. на ∂B^N имеет, предел вдоль областей экспоненциального контакта с границей

$$\left\{z \in B^N: |1 - \langle z, \xi \rangle| < \beta \left(\ln \frac{e}{1-|z|}\right)^{-\eta}\right\}, \quad \eta = \frac{p-1}{N}.$$

Для $p = N/\alpha \leq 1$ справедлива

Т е о р е м а 6 [15]. Если $0 < p = N/\alpha \leq 1$, то для $f \in H^p(B^N)$

$$\|R_\alpha f\|_{A(B^N)} \leq C \|f\|_{H^p(B^N)}.$$

Здесь c не зависит от f и $A(B^N)$ — класс функций, голоморфных в B^N и непрерывных в его замыкании, с обычной $\sup$ -нормой.

Эта теорема была доказана в [15] с помощью некоторых интегральных представлений, теоремы Банаха — Алаоглу и оценок, связанных с ВМОА. В [15] также отмечается, что теорема 6 имеет аналоги для любой строго псевдовыпуклой гладкой ограниченной области в C^N . В п. 3.6 мы укажем схему простого доказательства теоремы 6, основанную только на неравенстве (22), которая подходит для изучения случая любых (не обязательно строго псевдовыпуклых) областей в C^N с C^2 -границей (см. п. 3.7).

3.6. Дадим доказательство теоремы 6. Достаточно рассмотреть случай $p = 1$. Пусть $0 \neq z \in B^N$, $\zeta = z/|z|^{-1}$, T и T^* соответственно действительное и комплексное касательные пространства к ∂B^N в точке ζ . Выберем в T нормированный базис $e_1, \dots, e_{2N-1}$ так, что $e_2, \dots, e_{2N-1}$ ортогональный базис в T^* и e_1 ортогонален T^* , $\sum_{j=1}^{2N-1} x_j e_j = x \in T$. Если обозначить через Φ отображение, проектирующее $B(\zeta, 1/2)$ на T , то нетрудно убедиться, что

$$\left\{x \in T : |x_1| + \sum_{j=2}^{2N-1} x_j^2 < \frac{1-s}{2} \equiv t\right\} \subset \Phi(B(\zeta, 1-s)), \quad s \in (0, 1]$$

Положим $F = M_1 f \circ \Phi^{-1}$, тогда

$$|f(s|z|\zeta)| \leq F(x), \quad |x_1| + \sum_{j=2}^{2N-1} x_j^2 \leq t$$

или

$$|f(s|z|\zeta)| \leq F(ty_1^2, \sqrt{t}y_2, \dots, \sqrt{t}y_{2N-1}), \quad y \in \Sigma, \quad (23)$$

где

$$\Sigma = \{y \in \mathbb{R}^{2N-1} : \sum_{j=1}^{2N-1} y_j^2 = 1, 1/2 \leq y_1 \leq 1\}.$$

Интегрируя (23) по Σ , умножая обе части на $(1-s)^{N-1}$ и интегрируя по $0 < t \leq 1/2$, получим

$$|R_\alpha f(z)| \leq c \int_0^{1/2} t^{N-1} \int_\Sigma F(ty_1^2, \sqrt{t}y_2, \dots, \sqrt{t}y_{2N-1}) d\mu(y) dt,$$

где μ — поверхностная мера на Σ . Заменяя здесь t на t^2 , переходя от полярных координат к декартовым и возвращаясь из T на ∂B^N , получим неравенство теоремы 6.

3.7. Пусть Ω — ограниченная область в C^N , определяемая как

$$\Omega = \{z \in C^N : \rho(z) < 0\},$$

где $\rho \in C^2(C^N)$ и $\nabla \rho(z) \neq 0$ при $\rho(z) = 0$. Тогда граница $\partial\Omega = \{\zeta \in C^N : \rho(\zeta) = 0\}$ является C^2 -многообразием в C^N . Пусть σ и σ_δ соответственно поверхностные меры на $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_\delta$, где

$$\Omega_\delta = \{z \in C^N : \rho(z) < -\delta\}.$$

Через $H^p(\Omega)$, $0 < p < \infty$, обозначим пространство функций f , голоморфных в Ω , для которых [16]

$$\|f\|_{H^p(\Omega)} \equiv \sup_{\delta > 0} \left(\int_{\Omega_\delta} |f(\zeta)|^p d\sigma_\delta(\zeta) \right)^{1/p} < \infty.$$

Для $\zeta \in \partial\Omega$ обозначим через v_ζ единичную внешнюю нормаль к $\partial\Omega$ в точке ζ , и пусть

$$D_\varepsilon(\zeta) = \{z \in \Omega : |\langle \zeta - z, v_\zeta \rangle| + |\zeta - z|^2 < \beta d^\varepsilon(z, \partial\Omega)\},$$

$$M_\varepsilon f(\zeta) = \sup \{ |f(z)| : z \in D_\varepsilon(\zeta) \},$$

где $d(z, \partial\Omega)$ — евклидово расстояние от z до $\partial\Omega$. Тогда [16, с. 33]

$$\|M_1 f\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c \|f\|_{H^p(\Omega)}, \quad f \in H^p(\Omega), \quad p > 0.$$

Существует окрестность U границы $\partial\Omega$ такая, что можно отождествить $U \cap \Omega$ и $\partial\Omega \times (0, \delta)$, где $\delta > 0$ — малое число. Например, это можно сделать с помощью отображения $(\zeta, t) \rightarrow \zeta - tv_\zeta$, $\zeta \in \partial\Omega$, $0 < t < \delta$. Вводя еще квазиметрику

$$d(\zeta, \zeta') = |\langle \zeta - \zeta', v_\zeta \rangle| + |\zeta - \zeta'|^2,$$

мы можем применять результаты раздела 2, условие (11) тогда выполнено с $\gamma = N$.

На случай C^2 -областей Ω описанного типа переносятся теоремы 5 и 6, но здесь уже нет естественных разложений, подобных рассмотренным в п. 3.5, для функций, голоморфных в Ω . Мы остановимся на описании граничного поведения функций из классов Харди—Соболева

$$H_k^p(\Omega) = \{f \in H^p(\Omega) : \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{H^p(\Omega)} \equiv \|f\|_{H_k^p(\Omega)} < \infty\}.$$

Если $0 < p < N/k$, то для $f \in H_k^p(\Omega)$ и $\varepsilon \in [1 - kp/N, 1]$

$$\|M_\varepsilon f\|_{L^q(\partial\Omega)} \leq c \|f\|_{H_k^p(\Omega)}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p\varepsilon} \left(1 - \frac{kp}{N}\right).$$

При $p = N/k > 1$ функции из $H_k^p(\Omega)$ п. в. на $\partial\Omega$ имеют предел вдоль областей

$$\left\{ z \in \Omega : |\langle \zeta - z, v_\zeta \rangle| + |\zeta - z|^2 < \beta \left(\ln \frac{2 \operatorname{diam} \Omega}{d(z, \partial\Omega)} \right)^{-\eta} \right\}, \quad \eta = \frac{p-1}{N}.$$

Если же $p = N/k \leq 1$, то $H_k^p(\Omega) \subset A(\Omega)$. Доказательство последнего вложения можно провести как в п. 3.6.

Можно показать, что области подхода к границе во всех утверждениях раздела 3 являются оптимальными.

4. Граничное поведение решений краевых задач в липшицевых и C^1 -областях

4.1. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, называется липшицевой, если для любой точки $Q \in \partial\Omega$ существует декартова система координат $(x_1, \dots, x_{N-1}, x_N) = (x', x_N)$, окрестность $U \subset \mathbb{R}^N$ точки Q и функция φ такие, что

- 1) $|\varphi(x') - \varphi(y')| \leq L |x' - y'|$; $x', y' \in \mathbb{R}^{N-1}$
- 2) $U \cap \Omega = U \cap \{x \in \mathbb{R}^N : x_N < \varphi(x')\}$.

Если φ может быть выбрана в классе $C^1(\mathbb{R}^{N-1})$, то Ω называется C^1 -областью.

Ниже мы будем рассматривать только ограниченные липшицевы области со связной границей. Кроме того, для простоты считаем $\operatorname{diam} \Omega \leq 1$, это не ограничивает общности, но позволит упростить некоторые детали. Отметим, что все результаты, приводимые ниже остаются справедливыми и для неограниченных областей вида $\{x \in \mathbb{R}^N : x_N < \varphi(x')\}$, где $\varphi : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию 1).

Если $\Omega \subset R^N$ липшицева область, то в силу компактности существует конечное покрытие $\partial\Omega$ окрестностями U_i , $i = 1, \dots, m$, со свойствами, указанными выше. Обозначим через L_i постоянную из 1) для U_i . Точная нижняя грань по всем таким покрытиям величин $\max \{L_i : 1 \leq i \leq m\}$ называется липшицевой постоянной области Ω и обозначается через $L(\Omega)$.

4.2. Введем теперь области подхода к границе

$$D_\varepsilon(Q) = \{x \in \Omega : |x - Q| < \beta d^\varepsilon(x, \partial\Omega)\}. \quad (24)$$

Рассматривая липшицевы области, мы будем считать $\beta > (1 + L^2(\Omega))^{1/2}$, иначе для некоторых точек $Q \in \partial\Omega$ область $D_1(Q)$ может оказаться пустой. Областям (24) соответствуют максимальные операторы.

$$N_\varepsilon u(Q) = \sup \{|u(x)| : x \in D_\varepsilon(Q)\}.$$

Через σ обозначим поверхностную меру на $\partial\Omega$ и пространства L^p , встречающиеся ниже, связаны с этой мерой. Если

$$B(Q, t) = \{x \in R^N : |x - Q| < t\} \cap \partial\Omega$$

— поверхностные шары на $\partial\Omega$, то

$$c_1 t^{N-1} \leq \sigma(B(Q, t)) \leq c_2 t^{N-1}, \quad Q \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq 2$$

(c_1 и c_2 не зависят от Q и t). Через ∇u обозначаем градиент функции $u \in C^1(\Omega)$ в исходной системе координат в R^N .

4.3. Прежде чем рассматривать краевые задачи, приведем ряд следствий из результатов раздела 2 для липшицевых областей в форме, удобной для применений. Эти следствия состоят в оценках граничного поведения функции через ее производные. Мы ограничиваемся рассмотрением производных только первого порядка; аналоги приводимых ниже теорем 7 и 8 справедливы и для высших градиентов, но они нам здесь не понадобятся.

Теорема 7. Пусть $\Omega \subset R^N$ липшицева область, $0 < p < N - 1$. Тогда для любой функции $u \in C^1(\Omega)$ и $\varepsilon \in [1 - p/(N - 1), 1]$

$$\|N_\varepsilon u\|_{L^q(\partial\Omega)} \leq c \{ \|N_1(\nabla u)\|_{L^p(\partial\Omega)} + |u(x_0)| \}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p\varepsilon} \left(1 - \frac{p}{N-1}\right)$$

(x_0 — фиксированная точка в Ω , с не зависит от u).

В случае $p = N - 1 > 1$ (т. е. $N \geq 3$) из условия $N_1(\nabla u) \in L^p(\partial\Omega)$ следует, что u п. в. на $\partial\Omega$ имеет предел вдоль областей

$$\left\{ x \in \Omega : |x - Q| < \beta \left(\ln \frac{e}{d(x, \partial\Omega)} \right)^{-\eta} \right\}, \quad \eta = \frac{N-2}{N-1}.$$

Если же $N = 2$ и $p = 1$, то из $N_1(\nabla u) \in L^1(\partial\Omega)$ следует, что $u \in C(\overline{\Omega})$.

4.4. Для полноты будем рассматривать также случай $p > N - 1$. Для этого введем обычные классы Гельдера

$$H_\alpha(\Omega) = \{u : \sup |u(x) - u(y)| |x - y|^{-\alpha} < \infty, \quad x, y \in \Omega\},$$

где $0 < \alpha \leq 1$ (путаницы с обозначениями для классов Харди возникнуть не должно, так как последние ниже не встречаются).

Теорема 8. Пусть $\Omega \subset R^N$ липшицева область, $p > N - 1$. Тогда, если функция $u \in C^1(\Omega)$ такова, что $N_1(\nabla u) \in L^p(\partial\Omega)$, то $u \in H_{1-(N-1)/p}(\overline{\Omega})$

$$|u(x) - u(y)| \leq c \|N_1(\nabla u)\|_{L^p(\partial\Omega)} |x - y|^{1-(N-1)/p}, \quad x, y \in \overline{\Omega}$$

(с не зависит от u , x и y).

Отметим, что теорема 8 является более простым фактом, чем теорема 7.

Теоремы 7 и 8 имеют естественное поле приложений — краевые задачи для уравнений в частных производных, в которых в число условий задачи входит принадлежность некасательной максимальной функции градиента решения $N_1(\nabla u)$ тому или иному пространству L^p . Сейчас мы переходим к рассмотрению таких задач.

4.5. Задача Неймана для уравнения Лапласа. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ липшицева область и на $\partial\Omega$ задана функция $g \in L^p(\partial\Omega)$ с нулевым средним значением на $\partial\Omega$. Требуется найти функцию u в Ω со свойствами

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$D_1 - \lim v_Q^j \cdot \nabla u = g(Q) \text{ п. в. на } \partial\Omega, \quad (25)$$

$$N_1(\nabla u) \in L^p(\partial\Omega). \quad (26)$$

Здесь $x \cdot y$ скалярное произведение в $\mathbb{R}_x^N$ и v_Q единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке Q (для липшицевой области Ω нормаль v_Q^j существует для п. в. $Q \in \partial\Omega$).

Для C^1 -областей и $1 < p < \infty$ Фэйбс, Джодеит и Ривьер [17] доказали теорему существования и единственности (с точностью до постоянного слагаемого) для L^p -задачи Неймана. Далее Джерисон и Кениг [18] перенесли этот результат на липшицевы области $p = 2$. Наконец, Дальберг и Кениг [19] распространили это на случай липшицевых областей и $1 \leq p < 2 + \delta$, где $\delta > 0$ зависит от области Ω (случай $p = 1$ рассматривался в [19] в контексте пространств Харди).

4.6. Для дальнейшего нам понадобится определение классов Соболева на $\partial\Omega$. Пусть $Q \in \partial\Omega$, $Z = Z_Q(r, h)$ — цилиндр с центром в точке Q радиуса r и высоты $2h$, φ — функция в шаре $|x'| \leq r$. Пара (Z, φ) называется координатной для Ω в точке Q , если существует декартова система координат (x', x_N) с началом в точке Q , для которой

$$1) |\varphi(x') - \varphi(y')| \leq L |x' - y'|, |x'|, |y'| \leq r; \varphi(0) = 0;$$

$$2) Z = \{x : |x'| < r, |x_N| < h\};$$

$$3) Z \cap \partial\Omega = \{x : x_N = \varphi(x'), |x'| < r\};$$

$$4) Z \cap \Omega = \{x : \varphi(x') < x_N < h, |x'| < r\};$$

$$5) \sup \{|\varphi(x')| : |x'| < r\} < 1/2 h.$$

Ясно, что для любой точки Q на границе липшицевой области существует координатная пара, причем можно считать, что локальная координатная система (x', x_N) получена из исходной декартовой системы координат в $\mathbb{R}^N$ с помощью некоторых вращения и сдвига.

Говорят, что функция f на $\partial\Omega$ принадлежит классу Соболева $L_1^p(\partial\Omega)$, $1 < p < \infty$, если $f \in L^p(\partial\Omega)$ и для любой координатной пары (Z, φ) существуют функции $g_1, \dots, g_{N-1} \in L^p(\partial\Omega)$, для которых

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} h(x') g_j(x', \varphi(x')) dx' = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\partial h}{\partial x_j}(x') f(x', \varphi(x')) dx'$$

при всех $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \cap |Z|)$. В локальных координатах можно определить касательный градиент

$$\nabla_t f(Q) = (g(Q), 0) - (g(Q), 0) \cdot v_Q v_Q,$$

где $Q = (x', \varphi(x'))$, $g(Q) = (g_1(Q), \dots, g_{N-1}(Q))$ и

$$\|f\|_{L_1^p(\partial\Omega)} = \|f\|_{L^p(\partial\Omega)} + \|\nabla_t f\|_{L^p(\partial\Omega)}.$$

4.7. Задача Дирихле для уравнения Лапласа с L_1^p -граничными данными — эта задача получается из задачи Неймана (см. п. 4.5) заменой краевого условия (25) условием $D_1 - \lim u = f(Q)$ п. в. на $\partial\Omega$, где f — заданная функция класса $L_1^p(\partial\Omega)$.

Для C^1 -областей и $1 < p < \infty$ в [17] доказано, что эта задача имеет, и притом единственное, решение при любой функции $f \in L_1^p(\partial\Omega)$. Для липшицевых областей аналогичный результат получен в [18] для $p = 2$ и в [20] для всех $1 < p < 2 + \delta$ ($\delta > 0$ зависит от Ω).

Здесь можно привести простой пример, показывающий необходимость метрического контроля некасательной сходимости в постановке краевой задачи: речь идет об условии $N_1(\nabla u) \in L^p(\partial\Omega)$. Именно, в единичном шаре в $\mathbb{R}^N$ ядро Пуассона $P(x, Q) = (1 - |x|^2)^{1/2} |x - Q|^{-N}$ гармонично и некасательный предел его всюду, кроме одной точки на границе равен нулю.

Следующий пример связан с уравнением более высокого порядка.

4.8. Задача Дирихле для бигармонического уравнения с L^p -граничными данными. Пусть заданы функции $f \in L_1^p(\partial\Omega)$, $g \in L^p(\partial\Omega)$. Требуется найти функцию u в Ω со свойствами

$$\Delta^2 u = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$D_1 - \lim u = f(Q) \text{ п. в. на } \partial\Omega,$$

$$D_1 - \lim \nabla_Q \cdot \nabla u = g(Q) \text{ п. в. на } \partial\Omega,$$

$$N_1 u, N_1(\nabla u) \in L^p(\partial\Omega).$$

Можно показать, что условие $f \in L_1^p(\partial\Omega)$ является необходимым для разрешимости задачи (это можно сделать, используя, например, аналоги наших оценок для максимальных операторов Пеано из [11] для липшицевых областей).

Для липшицевых областей и $p = 2$ эта задача была решена в [21], более того, в [21] показано, что если $|p - 2| < \delta$ ($\delta > 0$ зависит от области Ω), то эта задача имеет единственное решение при любом наборе $f \in L_1^p(\partial\Omega)$, $g \in L^p(\partial\Omega)$. Для C^1 -областей и $1 < p < \infty$ см. [21] (в двумерном случае [22]).

4.9. Не вдаваясь в подробности, отметим еще, что Кальдерон [23] рассматривал в липшицевых областях задачу с косою производной. Кроме того, в таком же духе изучались некоторые системы уравнений теории упругости в $\mathbb{R}^3$ [24, 25].

4.10. Ясно, что теоремы 7 и 8 вместе с замечанием о случае $p = N - 1$ (см. п. 4.3) применимы к решению любой из краевых задач, приведенных в пп. 4.5, 4.7—4.9, и дают информацию о граничном поведении решений. Но такая связь является в определенной степени формальной (хотя и приводит к точным результатам: см. ниже теорему 10) — возможность применения теорем 7 и 8 обеспечивается лишь наличием условия (26).

С другой стороны, путем соединения теорем 7 и 8 с теорией разрешимости той или иной краевой задачи мы можем получить существенно более интересные применения: если граничные данные задачи локально ведут себя лучше, то и соответствующее единственное решение краевой задачи будет иметь лучшее локальное поведение. Сейчас мы приведем пример результата такого рода для случая C^1 -областей и $N \geq 3$ (причины введения этих ограничений разясняются в п. 4.11).

Рассмотрим, например, L^p -задачу Неймана для уравнения Лапласа. Как отмечалось в п. 4.5, для любой C^1 -области и любой функции $g \in$

$\in L^p(\partial\Omega)$, $1 < p < \infty$, эта задача имеет единственное (с точностью до постоянного слагаемого) решение.

Т е о р е м а 9. Пусть $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, C^1 -область и функция $g \in L^p(\partial\Omega)$, $1 < p < \infty$. Пусть еще существуют открытое множество $G \subset \partial\Omega$ и $s \in (p, \infty)$, для которых $g \in L^s(G)$. Тогда решение и L^p -задачи Неймана для уравнения Лапласа с граничной функцией g обладает следующими свойствами:

1) если $s < N - 1$, то и п. в. на G имеет $D_{1-s/(N-1)}$ -предел и для любого компакта $F \subset G$ и $\varepsilon \in [1 - s/(N - 1), 1]$

$$\|N_\varepsilon u\|_{L^q(F)} \leq c \{ \|g\|_{L^p(\partial\Omega)} + \|g\|_{L^s(G)} + |u(x_0)| \};$$

2) если $s = N - 1$, то и п. в. имеет на G предел вдоль областей

$$\left\{ x \in \Omega : |x - Q| < \beta \left(\ln \frac{e}{d(x, \partial\Omega)} \right)^{-\eta} \right\}, \quad \eta = \frac{N-2}{N-1};$$

3) если $s > N - 1$, то и непрерывно продолжим на G и для любого компакта $F \subset G$ и $\varepsilon \in H_{1-(N-1)/s}(\Omega(F))$,

$$|u(x) - u(y)| \leq c (\|g\|_{L^p(\partial\Omega)} + \|g\|_{L^s(G)}) |x - y|^{1-(N-1)/s}, \quad x, y \in \Omega(F).$$

Здесь всюду x_0 — любая фиксированная точка в Ω , постоянные c не зависят от u , x и y . Кроме того,

$$\Omega(F) = \bigcup_{Q \in F} D_1(Q).$$

4.11. Теорема 9 справедлива и для липшицевых областей, но при этом надо потребовать ограничения $1 < p < s \leq 2$.

Условие на область в теореме 9 вызвано желанием не налагать ограничений сверху на s . Кроме того, случай $N = 2$ не включен в формулировку теоремы 9 потому, что наиболее принципиальные части 1) и 2) этой теоремы теряют смысл. Часть 3) сохраняет силу и при $N = 2$.

Далее, в теореме 9 совсем не обязательно требовать C^1 -гладкости от всей границы $\partial\Omega$, достаточно этого условия на G .

Наконец, отметим, что теорема 9 справедлива и для других краевых задач, рассмотренных выше, в частности, это верно для задачи Дирихле для бигармонического уравнения.

4.12. Рассмотрим вопрос о точности теоремы 9. Следующее утверждение показывает, что области подхода к границе в ней выбраны оптимальным образом.

Т е о р е м а 10. Пусть $\Omega = B^N$ — единичный шар в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $1 < p < N - 1$. Пусть еще задана положительная невозрастающая функция Φ с $\lim_{t \rightarrow +0} \Phi(t) = \infty$. Тогда существует функция $g \in L^p(\partial\Omega)$ с нулевым средним значением на $\partial\Omega$, для которой решение соответствующей L^p -задачи Неймана для уравнения Лапласа не имеет предела вдоль областей

$$\{x \in B^N : |x - Q| < \Phi(1 - |x|)(1 - |x|)^{1-p/(N-1)}\}$$

для п. в. $Q \in \partial B^N$. Если $p = N - 1$, то это же верно для областей

$$\left\{ x \in B^N : |x - Q| < \Phi(1 - |x|) \left(\ln \frac{e}{1 - |x|} \right)^{-(N-2)/(N-1)} \right\}.$$

Можно показать, что утверждение 3) теоремы 9 также является точным. Кроме того, аналогичное утверждение верно и для задач, рассмотренных в п. 4.7 и 4.8.

4.12. В этом пункте мы хотим показать, каким образом теория разрешимости краевой задачи используется для доказательства теоремы 9. Именно, это нужно для того, чтобы установить включение $N_1(\nabla u) \in L^s(B(Q_0, r))$, где $Q_0 \in G$, а r — достаточно малое положительное число.

Пусть $(Z_Q(R, 4h), \varphi)$ — координатная пара для Ω в точке Q_0 (см. п. 4.6), причем локальная координатная система (x', x_N) выбрана так, что плоскость $x_N = 0$ совпадает с касательной плоскостью к $\partial\Omega$ в точке Q_0 . Число $R \in (0, 1)$ выбрано настолько малым, что $\|\nabla\varphi\|_\infty < h$, $B(Q_0, R) \subset G$.

Положим $r = 10^{-2}R$ и обозначим через Ω_0 область, ограниченную следующими поверхностями: цилиндрической поверхностью $|x'| = 50r$, полусферой $x_N = h + ((50r)^2 - |x'|^2)^{1/2}$ и графиком функции $\varphi + \psi$ в шаре $|x'| \leq 50r$, где

$$\psi(x') = \begin{cases} 0 & \text{при } |x'| \leq 49r, \\ r - (r^2 - (|x'| - 49r)^2)^{1/2} & \text{при } 49r < |x'| \leq 50r. \end{cases}$$

Тогда ясно, что $\Omega_0 \subset \Omega$ и Ω_0 является C^1 -областью. Обозначим через ν_Q^0 единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega_0$ в точке Q и рассмотрим функцию

$$g_0(Q) = \begin{cases} g(Q) & \text{при } Q \in \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_Q^0}(Q) & \text{при } Q \in \partial\Omega_0 \setminus (\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega), \end{cases}$$

где u — решение L^p -задачи Неймана в Ω с граничной функцией g . Нетрудно убедиться в том, что $g_0 \in L^s(\partial\Omega_0)$ и, кроме того, u является решением L^p -задачи Неймана в Ω_0 с граничной функцией g_0 . Пусть v — решение L^s -задачи Неймана в Ω_0 с граничной функцией g_0 . По теореме единственности из [17] $u = v + \text{const}$.

Обозначим через N_Ω некасательную максимальную функцию для Ω и через $D_\Omega(Q)$ — соответствующие некасательные области. Так как $N_{\Omega_0}(\nabla u) \in L^s(\partial\Omega_0)$, то $N_{\Omega_0}(\nabla u) \in L^s(\partial\Omega_0)$. Далее, если

$$N_{\Omega, r} u(Q) = \sup \{ |u(x)| : x \in D_\Omega(Q), d(x, \partial\Omega) < r \},$$

то при $Q \in B(Q_0, r)$, $x \in D_\Omega(Q)$, $d(x, \partial\Omega) < r$ будет $x \in D_{\Omega_0}(Q)$. Поэтому $N_{\Omega, r}(\nabla u)(Q) \leq N_{\Omega_0}(\nabla u)(Q)$ при $Q \in B(Q_0, r)$ и мы получаем $N_\Omega(\nabla u) \in L^s(B(Q_0, r))$.

Отсюда нетрудно вывести, что $N_\Omega(\nabla u) \in L^s(F[\delta])$, где $F[\delta] = \bigcup_{Q \in F} B(Q, \delta)$ — δ -окрестность на $\partial\Omega$ компакта $F \subset G$ с некоторым $\delta > 0$. После этого надо воспользоваться теоремами 7 и 8 (точнее их локальными аналогами в духе теоремы 4).

4.14. В этом пункте мы покажем, как теорема 7 сводится к теореме 4. Зафиксируем произвольно точку $P_0 \in \partial\Omega$ и выберем координатную пару $(Z_{P_0}(4r, 4h), \varphi)$ так, чтобы $r < h$, $M_\varphi < \beta$, где $M_\varphi = (1 + L_\varphi^2)^{1/2}$. Положим

$$G(s) = Z_{P_0}(s, 2h) \cap \partial\Omega, \quad \Omega(s) = Z_{P_0}(s, 2h) \cap \Omega. \quad d = \left(\frac{r}{12\beta} \right)^{1/2}.$$

Каждая точка $x \in \Omega(4r)$ однозначно представима в виде

$$x = (x', \varphi(x') + t) \equiv Q + (0, t), \quad (27)$$

где $Q = (x', \varphi(x')) \in \partial\Omega$. Покажем, что если $d(x, \partial\Omega) < 2M_\varphi d$, $x \in \Omega(2r)$, то

$$t < M_\varphi d(x, \partial\Omega). \quad (28)$$

Для этого возьмем любую точку $Q^0 \in \partial\Omega$ со свойством $|x - Q^0| = d(x, \partial\Omega)$, тогда $Q^0 \in G(4r)$, $Q^0 = (Q'_0, \varphi(Q'_0))$ и $Q_N \leq Q_N^0$ (иначе было бы $d(x, Q) = x_N - Q_N < x_N - Q_N^0 \leq d(x, \partial\Omega)$). Поэтому

$$t = x_N - Q_N = x_N - Q_N^0 + |\varphi(Q') - \varphi(Q'_0)| \leq x_N - Q_N^0 + L_\varphi |x' - Q'_0|$$

и из неравенства Коши получим (28).

Введем обозначение (см. (27)) $U(Q, t) = u(x)$, где $x = Q + (0, t)$ и определим вспомогательные области подхода к $\partial\Omega$

$$\Gamma_{\varepsilon, \beta, d}(P) = \{x = Q + (0, t): |P - Q| < \beta t^\varepsilon, 0 < t < d\}$$

и соответствующие максимальные функции

$$\mathcal{M}_{\varepsilon, \beta, d} U(P) = \sup \{|U(Q, t)|: Q + (0, t) \in \Gamma_{\varepsilon, \beta, d}(P)\}.$$

Кроме того, пусть $D_{\varepsilon, d}(P) = \{x \in D_\varepsilon(P): d(x, \partial\Omega) < d\}$. Докажем включение

$$D_{\varepsilon, d}(P) \subset \Gamma_{\varepsilon, 1+\beta, M_\varphi d}(P), \quad P \in G(r). \quad (29)$$

Пусть $x \in D_{\varepsilon, d}(P)$, запишем x в виде (27), тогда $|P - Q| \leq |x - P| + |x - Q| < \beta d^\varepsilon(x, \partial\Omega) + t < (1 + \beta)t^\varepsilon$, осталось учесть (28). Далее, для $x \in D_{\varepsilon, d}(P)$, $P \in G(r)$

$$|u(x)| \leq |u(Q + (0, t + d_1))| + \int_0^{d_1} V(Q, t + s) ds,$$

где $d_1 = M_\varphi d$, $v(x) = |\nabla u(x)|$. В силу (28) $d(Q_1, \partial\Omega) \geq d$, где $Q_1 = Q + (0, t + d_1)$, значит

$$|u(x)| \leq \sup_{d(x, \partial\Omega) \geq d} |u(x)| + \int_0^{d_1} V(Q, t + s) ds.$$

Теперь, используя включение (29), запишем для $P \in G(r)$

$$N_\varepsilon u(P) \leq \sup_{d(x, \partial\Omega) \geq d} |u(x)| + N_{\varepsilon, d} u(P) \leq 2 \sup_{d(x, \partial\Omega) \geq d} |u(x)| + \mathcal{M}_{\varepsilon, 1+\beta, d_1} (\mathcal{K}_{d_1} V)(P),$$

где

$$\mathcal{K}_{d_1} V(Q, t) = \int_0^{d_1} V(Q, t + s) ds.$$

Из последнего неравенства и теоремы 4 получаем

$$\|N_\varepsilon u\|_{L^q(G(r))} \leq c \{\| \cdot \|_{1, 1+\beta, 2d_1} V\|_{L^p(G(r/2))} + \sup_{d(x, \partial\Omega) \geq d} |u(x)|\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что при $\beta_1 > 0$

$$\|\mathcal{M}_{1, 1+\beta, 2d_1} V\|_{L^p(G(r/2))} \leq c \|\mathcal{M}_{1, \beta_1, 2d_1} V\|_{L^p(G(2r))}.$$

Выберем здесь β_1 так, чтобы $0 < \beta_1 < (1 + \beta)M_\varphi^{-1} - 1$ и докажем включение

$$\Gamma_{1, \beta_1, 2d_1}(P) \subset D_1(P), \quad P \in G(2r).$$

В самом деле, если $x = Q + (0, t) \in \Gamma_{1, \beta_1, 2d_1}(P)$, то из (28)

$$|x - P| \leq |P - Q| + |x - Q| < (1 + \beta_1)t < (1 + \beta_1)M_\varphi d(x, \partial\Omega).$$

Из доказанного включения вытекает

$$\|N_\varepsilon u\|_{L^q(G(r))} \leq c \{\|N_1(\nabla u)\|_{L^p(G(2r))} + \sup_{d(x, \partial\Omega) \geq d} |u(x)|\}.$$

Покрывая $\partial\Omega$ конечным числом цилиндров, к каждому применим полуженную оценку, приходя к неравенству

$$\|N_2 u\|_{L^q(\partial\Omega)} \leq \{\|N_1(\nabla u)\|_{L^1(\partial\Omega)} + \sup_{d(x, \partial\Omega) \geq d_0} |u(x)|\},$$

где d_0 — минимальное из чисел d , соответствующих выбранным цилиндрам. Отсюда уже легко вывести неравенство теоремы 7.

4.15. Доказательство теоремы 8. Пусть $P \in \partial\Omega$ и $(Z_P(4r, 4h), \varphi)$ — координатная пара, выбранная так же, как и в начале п. 4.14. Семейство цилиндров $\{Z_P(r/8\beta, 2h)\}_{P \in \partial\Omega}$ образует покрытие $\partial\Omega$, из которого можно выделить конечное подпокрытие $\{Z_{P_j}(r_j/8\beta, 2h_j)\}_{j=1}^m$. Положим тогда

$$d = \frac{1}{16\beta^2} \min\{r_1, \dots, r_m\}, \quad L = \max\{L_{\varphi_1}, \dots, L_{\varphi_m}\} < (\beta^2 - 1)^{1/2}.$$

Зафиксируем произвольно две точки $x_1, x_2 \in \Omega$ и докажем для них неравенство теоремы 8, предполагая, что

$$d(x_1, \partial\Omega) < 2d, \quad |x_1 - x_2| < d. \quad (30)$$

Нетрудно убедиться, что для некоторого j $x_1, x_2 \in \Omega_j(r_j/2\beta)$, где $\Omega_j(s) = Z_{P_j}(s, 2h_j) \cap \Omega$. Обозначим через

$$y_i = (x'_i, x_i^N + 4\beta |x_1 - x_2|), \quad i = 1, 2, \\ y(\lambda) = (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2, \quad \lambda \in [0, 1],$$

где $x_i = (x'_i, x_i^N)$ — запись в локальной системе координат. Тогда ясно, что $y(\lambda) \in \Omega_j(r_j/2\beta)$, $\lambda \in [0, 1]$. Кроме того, в силу (28)

$$d(y(\lambda), \partial\Omega) \geq 2|x_1 - x_2|. \quad (31)$$

Зафиксируем число b так, то $0 < b < \beta(1 + L^2)^{-1/2} - 1$, обозначим

$$Q(\lambda) = (y'(\lambda), \varphi(y'(\lambda))), \quad \lambda \in [0, 1],$$

$$B_\lambda = \{P \in \partial\Omega: |P - Q(\lambda)| < b|x_1 - x_2|\}, \quad \lambda \in [0, 1],$$

и покажем, что

$$y(\lambda) \in D_1(P), \quad P \in B_\lambda, \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (32)$$

Для этого прежде всего заметим, что $B_\lambda \subset \Omega_j(r_j)$:

$$|P - P_j| \leq |P - Q(\lambda)| + |P_j - Q(\lambda)| \leq b|x_1 - x_2| + |xy'(\lambda)| + \\ + |\varphi_j(y'(\lambda)) - \varphi_j(0)| \leq b|x_1 - x_2| + (1 + L^2)^{1/2}|y(\lambda)| < r_j,$$

Далее, в силу (28) и (31)

$$|y(\lambda) - P| \leq |Q(\lambda) - P| + |y(\lambda) - Q(\lambda)| \leq b|x_1 - x_2| + \\ + (1 + L^2)^{1/2}d(y(\lambda), \partial\Omega) < \beta d(y(\lambda), \partial\Omega)$$

и (32) доказано.

Обозначим $\delta = 4\beta|x_1 - x_2|$, $x_i(s) = (x'_i, \varphi_j(x'_i) + t_i + s) \equiv (x'_i, x_i^N + s)_s$, $B_i(s) = \{P \in \partial\Omega: |P - Q(i-1)| < b(t_i + s)\}$, $i = 1, 2$, и покажем, что

$$x_i(s) \in D_1(P), \quad P \in B_i(s), \quad s \in [0, \delta], \quad i = 1, 2. \quad (33)$$

Действительно, снова применяя (28) и выбор b , получим

$$|x_i(s) - P| \leq |P - Q(i-1)| + |x_i(s) - Q(i-1)| < (1 + b)(1 + \\ + L^2)^{1/2}d(x_i(s), \partial\Omega) < \beta d(x_i(s), \partial\Omega)$$

Оценим, наконец,

$$\begin{aligned} |u(x_1) - u(x_2)| &\leq |u(x_1) - u(y_1)| + |u(x_2) - u(y_2)| + |u(y_1) - u(y_2)| \leq \\ &\leq \int_0^\delta \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1(s)) \right| ds + \int_0^\delta \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x_2(s)) \right| ds + \\ &+ \int_0^1 |\nabla u(y(\lambda)) \cdot (x_2 - x_1)| d\lambda \equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

В силу (33)

$$|\nabla u(x_i(s))| \leq N_1(\nabla u)(P), \quad P \in B_i(s), \quad i = 1, 2,$$

следовательно,

$$|\nabla u(x_i(s))| \leq \left(\frac{1}{\sigma(B_i(s))} \int_{B_i(s)} N_1^p(\nabla u) d\sigma \right)^{1/p} \leq c s^{-(N-1)/p} \|N_1(\nabla u)\|_{L^p(\partial\Omega)}.$$

Из условия $p > N - 1$ теперь вытекает

$$I_1 + I_2 \leq c \|N_1(\nabla u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \int_0^\delta s^{-(N-1)/p} ds \leq c \delta^{1-(N-1)/p} \|N_1(\nabla u)\|_{L^p(\partial\Omega)}.$$

Аналогично из (32) выводим

$$\begin{aligned} |\nabla u(y(\lambda))| &\leq N_1(\nabla u)(P), \quad P \in B_\lambda, \quad \lambda \in [0, 1], \\ |\nabla u(y(\lambda))| &\leq c \delta^{-(N-1)/p} \|N_1(\nabla u)\|_{L^p(\partial\Omega)}, \quad \lambda \in [0, 1], \end{aligned}$$

поэтому

$$I_3 \leq c \delta^{1-(N-1)/p} \|N_1(\nabla u)\|_{L^p(\partial\Omega)},$$

и в предположении (30) неравенство теоремы 8 доказано.

Случай, когда (30) не выполнено, сводится к случаю $|x_1 - x_2| \geq d$ и $d(x_i, \partial\Omega) \geq d$, $i = 1, 2$. Теперь точки x_1 и x_2 можно соединить гладкой кривой $l \subset \Omega$, причем длина l не превосходит некоторой постоянной, зависящей лишь от области Ω , а $\text{dist}(l, \partial\Omega) \geq \rho > 0$ где ρ также зависит лишь от Ω . В этом легко убедиться, используя представление Ω в виде конечного объединения звездных липшицевых областей. Интегрируя вдоль такой кривой, получим

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq c \sup_{d(x, \partial\Omega) \geq \rho} |\nabla u(x)| \left(\frac{|x_1 - x_2|}{d} \right)^{1-(N-1)/p},$$

и отсюда вытекает нужное неравенство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cargo C. T. Angular and tangential limits of Blaschke products and their derivatives // Can. J. Math. 1962. Vol. 14. P. 334—338.
2. Kinney J. R. Tangential limits of functions of the class S_α // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 14. P. 68—70.
3. Nagel A., Rudin W., Shapiro J. Tangential boundary behavior of function in Dirichlet — type spaces // Ann. Math. 1982. Vol. 116. P. 331—360.
4. Fefferman C., Stein E. M. H^p spaces of several variables // Acta Math. 1972. Vol. 129. P. 137—193.
5. Стейн Е. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
6. Nagel A., Stein E. M. On certain maximal functions and approach regions // Adv. Math. 1984. Vol. 54. P. 83—106.
7. Coifman R. R., Meyer Y., Stein E. M. Some new function spaces and their applications to harmonic analysis // J. Funct. Anal. 1985. Vol. 62. P. 304—336.

8. Ahern P., Nagel A. Strong L^p -estimates for maximal functions with respect to singular measures with applications to exceptional sets // Duke Math. J. 1986. Vol. 53. P. 359—393.
9. Dorronsoro J. R. Poisson integrals of regular functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. Vol. 297. P. 669—685.
10. Coifman R. R., Weiss G. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 83. P. 569—645.
11. Стороженко Э. А., Кротов В. Г. О наилучших приближениях и производных аналитических функций из классов Харди // Исследования по теории приближения функций. Уфа: Изд-во БФАН СССР, 1987. С. 201—215.
12. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
13. Calderon A. P., Torchinsky A. Parabolic maximal functions associated with a distribution // Adv. Mathem. I — 1975. Vol. 16. P. 1—64. II — 1977. Vol. 24. P. 101—171.
14. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из C^n . М.: Мир, 1984.
15. Beatrous F. Boundary continuity of holomorphic functions in the ball // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. Vol. 97. P. 23—29.
16. Stein E. M. Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables. Princeton University Press, 1972.
17. Fabes E. B., Jodeit M. Jr., Riviere N. M. Potential techniques for boundary value problems on C^1 -domains // Acta Math. 1978. Vol. 141. P. 165—186.
18. Jerison D. S., Kenig C. E. The Neumann problem on Lipschitz domains // Bull. Amer. Math. Soc. 1978. Vol. 4. P. 203—208.
19. Dahlberg B. E. J., Kenig C. E. Hardy spaces and the Neumann problem in L^p for Laplace's equation in Lipschitz domains // Ann. Math. 1987. Vol. 135. P. 437—465.
20. Verchota G. C. Layer potentials and boundary value problems for Laplace's equation in Lipschitz domains // J. Funct. Anal. 1984. Vol. 59. P. 572—611.
21. Dahlberg B. E. J., Kenig C. E., Verchota G. C. The Dirichlet problem for the biharmonic equation in Lipschitz domains // Ann. Inst. Fourier. 1986. Vol. 36. P. 109—135.
22. Cohen J., Gosselin J. The Dirichlet problem for the biharmonic equation in a C^1 -domains in the plane // Indiana Univ. Math. J. 1983. Vol. 32. P. 635—685.
23. Calderon A. P. Boundary value problems for the Laplace's equation on Lipschitz domains // North-Holland Math. Stud. 1985. Vol. 101. P. 33—48.
24. Kenig C. E. Recent progress on boundary value problems on Lipschitz domains // Proc. Symp. Pure Math. 1985. Vol. 43. P. 175—205.
25. Kenig C. E. Elliptic boundary value problems on Lipschitz domains // Ann. Math. Stud. 1986. Vol. 112. P. 131—183.