УДК 517.5

О гладкости примитивных Н. Н. Лузина и о теоремах Д. Е. Меньшова и Н. К. Бари

Кротов В. Г.

§ 1. Введение

Хорошо известен следующий фундаментальный факт, установленный Н. Н. Лузиным.

Теорема Н. Н. Лузина. *Для любой измеримой почти всюду конечной функции f существует непрерывная функция F, для которой $F'(x)=f(x)$ почти всюду.*

Первое доказательство теоремы было опубликовано в [1], а в [2] дано упрощенное доказательство (см. еще [3]). В знаменитой диссертации Н. Н. Лузина [2] был указан также ряд важных приложений теоремы о примитивных, в частности, к вопросам представления функций тригонометрическими рядами. Именно, в [2] показано, что любая измеримая почти всюду конечная на $T=[0, 2\pi]$ функция представима тригонометрическим рядом, суммируемым к ней почти всюду методами Абеля — Пуассона и Римана. В связи с этим Н. Н. Лузин поставил проблему о возможности представления любых измеримых функций почти всюду сходящимися тригонометрическими рядами, подробное изложение результатов в этом направлении имеется в [3]. Существенным сдвигом в указанной проблеме Н. Н. Лузина является [4].

Теорема Д. Е. Меньшова. *Для любой измеримой почти всюду конечной на T функции существует тригонометрический ряд, сходящийся к ней почти всюду.*

Н. К. Бари [5] (см. также [6, с. 853]) доказала объединенный вариант теорем Н. Н. Лузина и Д. Е. Меньшова.

Теорема Н. К. Бари. *Для любой измеримой почти всюду конечной на T функции f существует непрерывная функция F со свойствами*

1) $F'(x)=f(x)$ *п. в. на* T;

2) *ряд Фурье функции F после почленного дифференцирования сходится к f п. в. на T.*

Целью настоящей работы является изучение следующего вопроса: какими дополнительными свойствами гладкости может обладать функция F в теореме Н. К. Бари или в теореме Н. Н. Лузина. Основное внимание будет уделено оценке гладкости в терминах модуля непрерывности второго порядка

$$\omega_1(h, F)=\sup_{|t|\leq h, x\in T}|F(x+t)-2F(x)+F(x-t)|.$$

Главный результат работы (теорема 1) состоит в том, что независимо от свойств f функцию F в теореме Н. К. Бари можно выбрать так, чтобы

$$\omega_2(h, F)=O(h\sigma(h)),\ \ h\to 0.$$

Здесь σ — наперед заданная положительная неубывающая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 \sigma^2(t)\,\frac{dt}{t} = \infty \qquad (*)$$

(и некоторому условию регулярности, точную формулировку см. в § 3). Будет показано также, что условие $(*)$ нельзя ослабить.

Основная идея доказательства приведенных выше теорем принадлежит Н. Н. Лузину и состоит в следующем. С помощью C-свойства заданная измеримая почти всюду конечная функция f записывается в виде $f = \sum \varphi_n$, где φ_n — определенным образом локализованные функции (почти в каждой точке только одно слагаемое в ряде отлично от нуля). После этого неопределенный интеграл Φ_n от функции φ_n приближается с помощью сингулярной функции Ψ_n, и искомая функция F строится в виде ряда $\sum (\Phi_n - \Psi_n)$ (существо дела в том, что сингулярное слагаемое Ψ_n не портит производную от Φ_n).

Д. Е. Меньшов для сходимости ряда Фурье от φ_n вместо C-свойства использовал усиленное C-свойство (теорему Д. Е. Меньшова об исправлении), а от сингулярной функции Ψ_n требовал, чтобы она не нарушала сходимости продифференцированного ряда Фурье от Φ_n. Этого удавалось добиться, грубо говоря, за счет конструкции нуль-рядов Д. Е. Меньшова, основанной на принципе локализации Римана для общих тригонометрических рядов. При этом важным оказывалось то обстоятельство, что Ψ_n была постоянна на интервалах, смежных к некоторому совершенному множеству меры нуль. Н. К. Бари действовала по схеме Д. Е. Меньшова, дополняя его конструкцию некоторыми дополнительными элементами.

Наше доказательство основной теоремы также построено на идеях Н. Н. Лузина и Д. Е. Меньшова, отличаясь, тем не менее, от них рядом важных моментов. Одно из таких отличий состоит в том, что мы не используем теорему Д. Е. Меньшова об исправлении, а только C-свойство, причем в полной мере (Н. Н. Лузин применял фактически лишь исправление до суммируемой функции). С другой стороны, некоторые идеи исправления функций по Д. Е. Меньшову все же присутствуют (см. ниже).

Основным и принципиальным отличием нашей схемы рассуждений будет построение сингулярных функций Ψ_n (это делается в основной лемме 4 в § 2) — функции с интервалами постоянства на носителе φ_n для этого не подходят. Точнее, о модуле гладкости функции Φ_n нельзя сказать ничего лучшего, чем $o(h)$, а сингулярная функция Ψ_n должна быть построена так, чтобы (кроме прочих условий)

$$\sup_h \frac{\omega_2(h,\ \Phi_n - \Psi_n)}{h\sigma(h)} < \varepsilon_n$$

и ряд Фурье — Стилтьеса $S[d(\Phi_n - \Psi_n)]$ сходился почти всюду к φ_n. Поскольку Φ_n имеет «медленный» модуль гладкости и это происходит из-за плохих свойств φ_n всюду на ее носителе, функции Ψ_n не разрешено иметь, вообще говоря, интервалов постоянства на носителе φ_n. Это в свою очередь существенно усложняет оценки для частных сумм ряда. Искомая функция Ψ_n строится в виде ряда из сингулярных функций и для оценки ее частных сумм Фурье — Стилтьеса используется модификация леммы Д. Е. Меньшова об исправленном множителе Дирихле (см., например, [6, с. 440]). При построении функций Ψ_n мы применяем также конструкцию гладких сингулярных функций из работы Кахана [7]. Этот вспомогательный материал излагается в § 2. В § 3 приведено доказательство основной теоремы, а в § 4 обсуждаются ее аналоги для модулей гладкости других порядков и некоторые приложения.

Приведем теперь список основных обозначений, которыми мы будем пользоваться систематически.

Q — множество точек из T вида $2\pi s/q$ $(s, q=1, 2, \ldots)$.

$|E|$ — мера Лебега измеримого множества E.

$d(x, E)=\inf\{|x-y|: y\in E\}$ — расстояние от x до E.

$I[f]$ — наименьший сегмент в T, содержащий носитель функции f.

L^0, L^1 и L^∞ — классы 2π-периодических измеримых соответственно почти всюду конечных, суммируемых и ограниченных функций на T.

$C(E)$ — класс непрерывных на множестве E функций с нормой

$$\|f\|_{C(E)}=\sup\{|f(x)|: x\in E\}.$$

Если $E=T$, то $C(T)\equiv C$. $C_{2\pi}$ — подкласс в C, состоящий из функций с $f(0)=f(2\pi)$. Модуль гладкости k-го порядка определяется равенством

$$\omega_k(h, F)=\sup\{\|\Delta_t^k F(\cdot)\|_C: |t|\leqslant h\},$$

где $\Delta_t^k F(x)=\Delta_t^1[\Delta_t^{k-1}F(x)]$, $k\geqslant 2$, $\Delta_t^1 F(x)=F(x+t/2)-F(x-t/2)$, $\Delta_t F(x)=F(x+t)-F(x)$.

W — класс функций из $C_{2\pi}$ с $\omega_1(h, F)=O(h)$,

V — класс функций ограниченной вариации,

$$V(F)=\sup_{\Pi}\sum_{i=1}^{n}|F(x_i)-F(x_{i-1})|,$$

где точная верхняя грань берется по всем Π: $0=x_0<\ldots<x_n=2\pi$.

$S[f]$ — ряд Фурье функции $f\in L^1$, $S[df]$ — ряд Фурье — Стилтьеса, определяемый естественным способом для $f\in C$, $s_n(x, f)$, $s_n(x, df)$ — соответственно частные суммы этих рядов, $s_n^*(x, f)$, $s_n^*(x, df)$ — модифицированные частные суммы — свертки с модифицированным ядром Дирихле $D_n^*(t)=\sin nt/t$.

U — класс функций с равномерно сходящимися рядами Фурье, $\|f\|_U=\sup\limits_n\|s_n(\cdot, f)\|_C$.

Σ — класс неубывающих положительных функций на $(0, 1]$. Если $\sigma\in\Sigma$, то

$$\|f\|_\sigma=\|f\|_C+\sup_h \omega_2(h, f)/h\sigma(h).$$

Через A будем обозначать различные положительные постоянные, величины которых не имеют значения.

§ 2. Вспомогательные утверждения

2.1. В работе [7] приведено следующее утверждение: *если* $\sigma\in\Sigma$ *и*

$$\sigma(4h)\leqslant 2\sigma(h),\quad 0<h\leqslant\frac{1}{4}, \tag{2.1}$$

$$\int_0^1\sigma^2(t)\frac{dt}{t}=\infty, \tag{2.2}$$

то существует положительная мера $d\mu$, сосредоточенная на множестве меры нуль, для примитивной которой

$$|\Delta_h^2\mu(x)|\leqslant h\sigma(h) \quad 0<h\leqslant\frac{1}{4}.$$

Доказательство этого утверждения содержит неточности. Более того, ниже будет приведен пример, показывающий, что конструкция работы [7] не позволяет доказать сформулированный результат. Несколько подправляя построения из [7], можно добиться нужной цели, но ценой ухудшения условия (2.1). Мы намереваемся использовать эту конструкцию, поэтому она будет сейчас изложена более подробно.

Пусть $c_0>0$ и $\{c_j\}$ — последовательность чисел, где либо $c_j=c_{j-1}$, либо $c_j=\frac{1}{2}c_{j-1}$ $(j\geqslant 1)$, причем последнее равенство не может иметь места для двух j подряд. Будем предполагать также, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j^2=\infty. \tag{2.3}$$

Пусть еще задан отрезок I_0.

Построим по индукции последовательность функций $\{\varphi_j\}$, начиная с $\varphi_0(x)\equiv c_0$ на I_0 и равной нулю вне I_0. Пусть $\varphi_0, \ldots, \varphi_{j-1}$ уже построены, причем они неотрицательны и φ_{j-1} постоянна на каждом из отрезков, полученных делением I_0 на 4^{j-1} равных частей, и равны нулю вне I_0. Обозначим эти отрезки через I_{j-1}. Если на каком-то $I_{j-1}\equiv I$ $\varphi_{j-1}(x)\equiv 0$, то и $\varphi_j(x)\equiv 0$ на I. Если же $\varphi_{j-1}(x)>0$ на I, то разобьем I на четыре равные части I^1, I^2, I^3 и I^4 (это будут какие-то I_j) и положим

$$\varphi_j(x)=\varphi_j(x)+c_j\varepsilon(I^k) \quad \text{при } x\in I^k, \tag{2.4}$$

где $\varepsilon(I^k)=1$ или -1 по следующему правилу: если на I_{j-1}, ближайшем слева от I (справа от I), $\varphi_{j-1}(I_{j-1})>\varphi_{j-1}(I)$, то положим $\varepsilon(I^1)=1$ (соответственно $\varepsilon(I^4)=1$), а в противном случае $\varepsilon(I^1)=-1$ (соответственно $\varepsilon(I^4)=-1$) и

$$\varepsilon(I^1)\varepsilon(I^2)=\varepsilon(I^3)\varepsilon(I^4)=-1. \tag{2.5}$$

На остальных I^k определим $\varepsilon(I^k)$ равным 1 или -1 произвольно, но с соблюдением (2.5). По индукции $\{\varphi_j\}$ построена.

Пусть

$$\Phi_j(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi_j(t)\,dt.$$

Легко видеть, что $\{\Phi_j\}$ равномерно сходится к неубывающей функции $\psi\in C(I_0)$.

Положим $\varepsilon_j(x)=\varepsilon(I_j)$ при $x\in I_j$. Рассматривая $\{\varepsilon_j\}$ как последовательность независимых случайных величин (см., например, [8]), в силу (2.3) и теоремы Радемахера — Колмогорова — Хинчина имеем

$$\varliminf_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k} c_j\varepsilon_j(x)=-\infty \quad \text{п. в. на } I_0. \tag{2.6}$$

Пусть (2.6) выполнено на множестве E. Зафиксируем точку $x\in E$ не вида $a+(b-a)i4^{-j}$ (a и b — концы I_0). Тогда найдется наименьший номер k со свойством

$$\sum_{j=0}^{k} c_j\varepsilon_j(x)<0$$

(в частности, $\varepsilon_k(x)<0$). Так как, очевидно,

$$\sum_{j=0}^{k-1} c_j\varepsilon_j(x)=Nc_k,$$

где N натуральное или нуль, то

$$\sum_{j=0}^{k} c_j\varepsilon_j(x)=Nc_k-c_k<0$$

и обязательно $N=0$. Таким образом,

$$\sum_{j=0}^{k-1} c_j\varepsilon_j(x)=0,\ \sum_{j=0}^{i} c_j\varepsilon_j(x)>0\ \ (i=0,\ \ldots,\ k-1).$$

В силу определения $\{\varphi_j\}$ для I_{k-1}, содержащего x,

$$\varphi_k(y)=\varphi_{k+1}(y)=\ldots=0 \text{ при } y\in I_{k-1}.$$

Поэтому ψ постоянна на этом I_{k-1}. Мы показали, что каждая точка из E, исключая, быть может, счетное множество, принадлежит некоторому интервалу постоянства функции ψ.

Оценим модуль гладкости для ψ. Положим

$$\mu(I)=\psi(\beta)-\psi(\alpha),\ D(I)=\mu(I)\,|I|^{-1}\ \ (I=[\alpha,\ \beta]\subset I_0)$$

и докажем неравенство

$$|D(I_j')-D(I_j'')|\leqslant 3c_j \tag{2.7}$$

для любых соседних отрезков I_j' и I_j''. Это неравенство будет доказано, если мы установим, что все скачки функции φ_j не превосходят $3c_j$. По индукции можно убедиться, что

а) если $\varphi_{j-1}(x_0\pm 0)\neq 0$, то φ_j непрерывна в точке x_0 или терпит скачок $2c_j$;

б) если $\varphi_{j-1}(x_0-0)=0$ или $\varphi_{j-1}(x_0+0)=0$, но не одновременно, то φ_j терпит скачок в точке x_0, не превосходящий $3c_j$, в случае $2c_j=c_{j-1}$ и скачок, не превосходящий $2c_j$, в случае $c_j=c_{j-1}$.

Поэтому в силу того, что равенство $2c_j=c_{j-1}$ не может выполняться для двух j подряд, скачки φ_j не превосходят $3c_j$.

Используя (2.7) и дословно повторяя рассуждения из [7], получаем оценку

$$|\mu(I)-\mu(I')|\leqslant 20|I|c_{j-1}$$

для любых отрезков $I,\ I'\subset I_0$, равной длины и имеющих общую концевую точку,

$$4^{-j}|I_0|\leqslant|I|=|I'|\leqslant 4^{1-j}|I_0|,\ j>1.$$

Таким образом, справедлива

Лемма 1. *Пусть $\sigma_0\in\Sigma$ удовлетворяет условиям*

$$\sigma_0(16h)\leqslant 2\sigma_0(h), \tag{2.8}$$

$$\int_0^1 \sigma_0^2(t)\frac{dt}{t}=\infty. \tag{2.9}$$

Пусть еще заданы число $c_0\geqslant 0$ и сегмент I_0, причем

$$c_0<\frac{1}{20}\sigma_0(|I_0|/4). \tag{2.10}$$

Тогда существует непрерывная неубывающая функция $\psi \in C(I_0)$ *со свойствами*

1) $\psi(x) \equiv 0$ *на левой четверти* I_0, $\psi(x) \equiv c_0$ *на правой четверти* I_0;

2) ψ *постоянна на интервалах, смежных к некоторому совершенному множеству меры нуль*;

3) $|\Delta^2 \psi(x)| \leqslant h\sigma_0(h)$ *при* $0 < h \leqslant |I_0|/4$, $x \pm h \in I_0$.

Надо взять $c_0 = c_1 = \ldots = c_k$, где $k \geqslant 1$ определяется условием

$$c_0 \leqslant \sigma_0(4^{-k}|I_0|)/20 < 2c_0,$$

и положить при $j > k$

$$c_j = c_0 2^{-\nu j}, \text{ если } c_0 2^{-\nu j} \leqslant \sigma_0(4^{-j-1}|I_0|)/20 < c_0 2^{1-\nu j}.$$

Тогда из (2.8) следует, что $c_j = c_{j-1}$ или $2c_j = c_{j-1}$, причем второй случай не встречается для двух j подряд, а из (2.9) следует (2.3). Теперь можно применить изложенную конструкцию.

Замечание. В работе [7] не требовалось, чтобы равенство $2c_j = c_{j-1}$ не могло выполняться для двух j подряд, поэтому в ней вместо условия (2.8) фигурировало условие (2.1). Сейчас мы построим контрпример, показывающий, что в рамках условия (2.1) конструкция может не сработать. Это вызвано тем, что условие (2.7) в [7] проверялось только для соседних I_j' и I_j'', полученных разбиением какого-то из I_{j-1}. Но использовать это условие надо для любых соседних I_j' и I_j''.

Возьмем $I_0 = [0, 1]$, $c_0 = c_1 = 1$ и $c_j = c_1 2^{-j}$ $(j = 1, \ldots, k_1)$, где k_1 выбрано достаточно большим. Нетрудно видеть, что

$$\varphi_{k_1}(x) \equiv 0 \text{ при } x \in [0, {}^1/_4),$$

$$\varphi_{k_1}(x) \equiv 2 - \sum_{j=1}^{k_1} 2^{-j} \geqslant 1 \text{ при } x \in ({}^1/_4, {}^1/_4 + 2^{-k_1}),$$

следовательно,

$$|\Delta^2_{4^{-k_1}} \psi({}^1/_4)| \geqslant 4^{-k_1}.$$

После этого возьмем $c_j = c_{k_1}$ столько раз, чтобы

$$\sum_{j=k_1+1}^{m_1} c_j^2 \geqslant 1$$

и повторим аналогичный процесс, взяв вместо 1/4 любую точку вида $\nu_1 4^{-m_1}$, в которой $\varphi_{m_1}(\nu_1 4^{-m_1} - 0) = 0$ и $\varphi_{m_1}(\nu, 4^{-m_1} + 0) > 0$. По индукции построим последовательность $\{c_j\}$ с нужными свойствами такую, что для некоторых $\{k_i\}$, $\{m_i\}$ и $\{\nu_i\}$ с $k_i - m_{i-1} \to \infty$ выполнены неравенства

$$|\Delta^2_{4^{-k_i}} \psi(\nu_{i-1} 4^{-m_{i-1}})| \geqslant 4^{-k_i} c_{m_{i-1}} = 4^{-k_i} c_{k_i} 2^{k_i - m_{i-1}}, \quad \sum_{j=k_i+1}^{m_i} c_j^2 \geqslant 1.$$

Полагая $\sigma(4^{-j}) = c_j$ и линейно интерполируя σ, получим (2.1) и (2.2), но для соответствующей функции ψ

$$\omega_2(4^{-k_i}, \psi) \geqslant 2^{k_i - m_{i-1}} 4^{-k_i} \sigma(4^{-k_i}) \neq O(4^{-k_i} \sigma(4^{-k_i})).$$

2.2. Следующая лемма является удобным для нас видоизменением известной леммы Д. Е. Меньшова (см., например, [6, с. 440]).

Лемма 2. *Пусть* $\nu > 8$ *и* $r > 2$ — *натуральные числа,* $q = \nu r$. *Положим*

$$\alpha_s=2\pi(s-1/2)/q;\;\; \Delta_s=[\alpha_s-\pi/q\nu,\; \alpha_s+\pi/q\nu],\;\; s=1,\dots,q;$$

$$I_s=[\alpha_s+2\pi/q\nu,\; \alpha_{s+1}-2\pi/q\nu],\;\; s=1,\dots,q-1;\;\; E=\bigcup_{s=r}^{q-r-1} I_s.$$

Пусть еще задана неубывающая функция $\psi\in C(R)$ *со свойствами*

$$\psi(x)\equiv 0 \text{ при } x\leqslant -\pi/q\nu,\;\; \psi(x)\equiv 1 \text{ при } x\geqslant \pi/q\nu.$$

Тогда при $x\in E$ *выполнено неравенство*

$$\left|\sum_{s=1}^{q}\int\limits_{\Delta_s} D_n^*(x-t)\,d\psi(t-\alpha_s)\right|\leqslant Aq\nu,\;\; n\geqslant 1.$$

Отличие леммы 2 от леммы Д. Е. Меньшова состоит в том, что мера, пропорциональная мере Лебега, сосредоточенная на отрезках Δ_s, заменяется на произвольную положительную меру, сосредоточенную на объединении отрезков Δ_s и одинаково распределенную на каждом из таких отрезков. Это отличие совершенно не влияет на метод доказательства (см. [6, с. 440—443]) и мы его опустим.

В следующей лемме 3 мы сохраняем обозначения из леммы 2.

Лемма 3. *Пусть* $B_1,\dots,B_q$ — *действительные числа и*

$$\Psi(x)=\sum_{s=1}^{q} B_s\psi(x-\alpha_s).$$

Тогда при всех $x\in E$ *и* $n\geqslant 1$

$$|s_n^*(x,\, d\Psi)|\leqslant Aq(\nu\max|B_s|+q\max|B_{s+1}-B_s|).$$

Доказательство. Пусть $x\in E$ и Δ_p — ближайший к x из отрезков Δ_s, $1\leqslant s\leqslant q$. Тогда

$$s_n^*(x,\, d\Psi)=\sum_{s=2}^{q} B_s J_s^n(x)=$$

$$=B_p\sum_{s=1}^{q} J_s^n(x)+\sum_{s=1}^{q}(B_s-B_p)J_s^n(x), \text{ где } J_s^n(x)=\int\limits_{\Delta_s} D_n^*(x-t)\,d\psi(t).$$

Первое слагаемое оценивается с помощью леммы 2, а для оценки второго заметим, что

$$|B_s-B_p|\leqslant|s-p|\max|B_{s+1}-B_s|.$$

Кроме того, при $s\neq p$ $d(x,\Delta_s)\geqslant A|s-p|/q$, поэтому

$$|J_s^n(x)|\leqslant Aq/|s-p|.$$

Объединяя эти неравенства, получаем утверждение леммы.

2.3. Следующая лемма является основным вспомогательным фактом, используемым при доказательстве теоремы 1.

Лемма 4. *Пусть функция* $\sigma\in\Sigma$ *удовлетворяет условиям* (2.8) *и* (2.9). *Пусть заданы также число* $\varepsilon>0$ *и функция* $\varphi\in C_{2\pi}$, *причем* $I[\varphi]\subset\subset(0,2\pi)$ *и его концы принадлежат* Q. *Положим*

$$\Phi(x)=\int\limits_0^x\varphi(t)\,dt. \tag{2.11}$$

Тогда существует функция $\Psi\in C$ *со свойствами*

1) $\Psi(x)\equiv\Phi(x)$ *при* $x\in T\setminus I[\varphi]$;

2) $\Psi'(x)=0$ *п. в. на* T;

3) $V(\Psi)\leqslant 2\|\varphi\|_1$;

4) $\|\Phi-\Psi\|_\sigma<\varepsilon$;

5) $S[d(\Phi-\Psi)]$ *сходится к* φ *п. в. на* T.

Доказательство. Нетрудно построить последовательность функций $\{\varphi_m\}\subset W$ так, чтобы

$$I[\varphi_m]\subset I[\varphi], \tag{2.12}$$

$$\varphi \overset{C}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m, \tag{2.13}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|\varphi_m\|_1 \leqslant 2\|\varphi\|_1, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \|\varphi_m\|_C \leqslant 2\|\varphi\|_C, \tag{2.14}$$

$$\lim_{m\to\infty} \|\varphi_m\|_U = \lim_{m\to\infty} \|\varphi_m'\|_C = 0. \tag{2.15}$$

Ряд со свойствами (2.12)—(2.14) построить легко, затем надо разделить каждый член ряда на достаточно большое натуральное число и повторить полученную функцию слагаемым столько же раз, тем самым будет достигнуто и условие (2.15). Пусть

$$\Phi_m(x) = \int_0^x \varphi_m(t)\,dt, \tag{2.16}$$

тогда из (2.13) следует, что

$$\Phi \overset{\Gamma C}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m. \tag{2.17}$$

В силу (2.13) найдется последовательность натуральных чисел $\{\nu_m\}$ со свойствами

$$\sum_{m}^{\infty} \nu_m^{-1} < \infty, \tag{2.18}$$

$$\lim_{m\to\infty} \nu_m \|\varphi_m\|_C = 0. \tag{2.19}$$

Построим теперь по индукции последовательность функций $\{\Psi_m\}\subset C$ и натуральных чисел $\{n_m\}$ так, чтобы выполнялись условия

$$\varepsilon^{-1/2}<n_1<n_2<\ldots<n_m<\ldots, \tag{2.20}$$

$$\Psi_m(x)=\Phi_m(x) \quad \text{при } x\in T\setminus I[\varphi], \tag{2.21}$$

$$\Psi'_m(x)=0 \text{ п. в. на } T, \tag{2.22}$$

$$V(\Psi_m)\leqslant V(\Phi_m), \quad \|\Psi_m\|_C\leqslant\|\Phi_m\|_C, \tag{2.23}$$

$$\|\Phi_m-\Psi_m\|_\sigma \leqslant n_{m-1}^{-2}2^{-m-1}, \tag{2.24}$$

$$|\{x\in T: |s_n^*(x, d\Psi_m)| > \nu_m\|\varphi_m\|_C + 2\pi\|\varphi_m'\|_C\}| \leqslant A\nu_m^{-1}, \ n\geqslant 1, \tag{2.25}$$

$$\Big|\Big\{x\in T: \Big|\sum_{\mu=1}^{m} [s_n(x, d(\Phi_\mu-\Psi_\mu))-\varphi_\mu(x)]\Big| > 2^{-m}\Big\}\Big| \leqslant m^{-2}, \ n\geqslant n_m. \tag{2.26}$$

Предположим, что функции $\Psi_1, \ldots, \Psi_{m-1}$ и числа $n_1, \ldots, n_{m-1}$ с нужными свойствами уже построены и покажем, как следует определить Ψ_m и n_m.

Выберем натуральное число q настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$2\pi/q<\min\{d(0, I[\varphi]), d(2\pi, I[\varphi])\}, \tag{2.27}$$

$$\|\Phi_m''\|_C \leqslant 2^{-10}(\nu_m n_{m-1})^{-2}2^{-m}\sigma(h)/h \quad \text{при } 0<h\leqslant h_m=\pi/4q\nu_m, \tag{2.28}$$

$$2\pi\|\Phi_m'\|_C \leqslant 2^{-20}(\nu_m n_{m-1})^{-2}2^{-m}\sigma(2h_m). \tag{2.29}$$

Положим теперь

$$I_0=[-4h_m,\ 4h_m],\ \ c_0=2\pi\|\Phi'_m\|_C/q, \tag{2.30}$$

$$\sigma_0(h)=2^{-10}(\nu_m n_{m-1})^{-2}2^{-m}\sigma(h) \tag{2.31}$$

и применим лемму 1 (условие (2.10) выполнено в силу (2.29)). Пусть ψ — функция, определяемая по лемме 1 в этом случае. Обозначим через

$$B_s=\Phi_m(2\pi s/q)-\Phi_m(2\pi(s-1)/q),\ \ s=1,\ \ldots,\ q, \tag{2.32}$$

и определим искомую функцию Ψ_m равенством[1]

$$\Psi_m(x)=c_0^{-1}\sum_{s=1}^{q}B_s\psi(x-2\pi(s-{}^1/_2)/q). \tag{2.33}$$

Увеличивая в случае надобности q, можно добиться (см. (2.27)), чтобы концы $I[\varphi]$ были точками вида $2\pi s/q$, $1\leqslant s\leqslant q$, поэтому, учитывая, что Φ_m постоянна слева и справа от $I[\varphi]$, видим, что условие (2.21) выполнено. Свойства (2.22)—(2.23) очевидны в силу условий 2) леммы 1 и (2.33).

Проверим условие (2.24). Для этого сначала заметим, что в силу (2.32) и (2.33)

$$\|\Phi_m-\Psi_m\|_C\leqslant\omega_2(\pi/q,\ \Phi_m-\Psi_m), \tag{2.34}$$

так как Ψ_m интерполирует Φ_m в точках $2\pi s/q$, $s=0,\ \ldots,\ q$ (см. [9], а также [8, с. 218]).

Далее оценим $\Delta_h^2\Psi_m(x)$ при $0<h\leqslant h_m$ (см. (2.28)). Если точка x попадает на один из отрезков $(3/4)\Delta_s$[2], то $x\pm h\in\Delta_s$ и по лемме 1 $|\Delta_h^2\Psi_m(x)|\leqslant h\sigma_0(h)$. Если же x не принадлежит ни одному из таких отрезков, но $x\pm h\in T$, то все три точки x, $x\pm h$ попадают на один из интервалов постоянства Ψ_m и в этом случае $\Delta_h^2\Psi_m(x)=0$. Следовательно,

$$|\Delta_h^2\Psi_m(x)|\leqslant h\sigma_0(h),\ \ 0<h\leqslant h_m,\ x\pm h\in T.$$

Теперь оценим $\Delta_h^2(\Phi_m-\Psi_m)(x)$ отдельно для $0<h\leqslant h_m$ и $h\geqslant h_m$. В первом случае, если x удалено от одной из точек 0 или 2π меньше, чем на h_m, то Φ_m и Ψ_m совпадают в каждой из точек x, $x\pm h$ (см. (2.21), (2.27)) и $\Delta_h^2(\Phi_m-\Psi_m)(x)=0$; в противном случае x, $x\pm h\in T$ и

$$|\Delta_h^2(\Phi_m-\Psi_m)(x)|\leqslant h^2\|\Phi_m''\|_C+h\sigma_0(h),\ \ 0<h\leqslant h_m,\ x\pm h\in T. \tag{2.35}$$

Поэтому, используя неравенства (2.28) и (2.31), получаем

$$\omega_2(h,\ \Phi_m-\Psi_m)\leqslant 2^{-(m+2)}n_{m-1}^{2}h\sigma(h),\ \ 0<h\leqslant h_m. \tag{2.36}$$

Если же $h\geqslant h_m$, то применим неравенства (2.34) и (2.36), согласно которым

$$\omega_2(h,\ \Phi_m-\Psi_m)\leqslant 4\omega_2(\pi/q,\ \Phi_m-\Psi_m)\leqslant$$
$$\leqslant 2^6\nu_m^2\omega_2(h_m,\ \Phi_m-\Psi_m)\leqslant 2^{-(m+2)}n_{m-1}^{-2}h_m\sigma(h_m).$$

Это неравенство вместе с (2.36) дает условие (2.24).

Для доказательства (2.25) будем использовать лемму 3. Так как (см. (2.32))

$$\max|B_s|\leqslant 2\pi\|\Phi_m'\|_C/q,\ \ \max|B_{s+1}-B_s|\leqslant(2\pi/q)^2\|\Phi_m''\|_C,$$

[1] Считаем $\psi(x)\equiv 0$ при $x\leqslant -4h_m$ и $\psi(x)\equiv c_0$ при $x\geqslant 4h_m$.

[2] $\lambda\Delta$ — отрезок, концентрический к Δ, длины $\lambda|\Delta|$.

то на множестве E из леммы 3

$$|s_n^*(x,\ d\Psi_m)| \leqslant A(\nu_m \|\varphi_m\|_C + 2\pi \|\varphi'_m\|_C)$$

и $|E| \geqslant 2\pi - A/\nu_m$, следовательно, (2.25) доказано.

Для выбора n_m надо установить, что $S[d(\Phi_m - \Psi_m)]$ сходится к φ_m почти всюду. Это делается стандартным способом (см. [6, с. 857]) с помощью принципа локализации Римана для общих тригонометрических рядов и мы на этом не останавливаемся. Отметим только, что для этого надо использовать условие 2) леммы 1 и то, что коэффициенты Фурье функции $\Phi_m - \Psi_m$ имеют порядок $o(1/n)$ (последнее вытекает из (2.24)). Далее, так как ряд Фурье – Стилтьеса $S[d(\Phi_m - \Psi_m)]$ сходится к φ_m почти всюду при $\mu = 1, \ldots, m$, то найдется $n_m > n_{m-1}$, для которого выполнено (2.26). Итак, последовательности $\{\Psi_m\}$ и $\{n_m\}$ со свойствами (2.20) – (2.26) построены.

Положим

$$\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m; \tag{2.37}$$

в силу вторых неравенств из (2.23) и (2.14) ряд справа сходится равномерно. Проверим условия 1) – 5).

Очевидно из (2.21) следует 1). Далее, используя первые неравенства (2.23) и (2.14), получаем 3). Отсюда же следует, что ряд (2.37) сходится в пространстве V, а так как Ψ_m сингулярны, то (см. [10]) Ψ сингулярна и 2) выполнено. Наконец, 4) непосредственно вытекает из (2.20) и (2.24).

Для проверки 5), используя равномерную сходимость рядов (2.17) и (2.37), запишем

$$s_n(x,\ d(\Phi - \Psi)) - \varphi(x) = \sum_{\mu=1}^{m-1} [s_n(x,\ d(\Phi_\mu - \Psi_\mu)) - \varphi_\mu(x)] +$$
$$+ [s_n(x,\ \varphi_m) - \varphi_m(x)] - s_n(x,\ d\Psi_m) + \sum_{\mu=m+1}^{\infty} s_n(x,\ d(\Phi_\mu - \Psi_\mu)) + \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \varphi_\mu(x), \tag{2.38}$$

Обозначим через E^1_m и E^2_m соответственно множества из (2.25) и (2.26). Тогда (см. (2.18))

$$|\liminf E^1_m \cap \liminf E^2_m| \equiv |E| = 2\pi.$$

Зафиксируем $x \in E$ и найдем m_0 так, чтобы $x \in E^1_m \cap E^2_m$ при $m \geqslant m_0$. Пусть еще $n \geqslant n_{m_0-1}$ и $m \geqslant m_0$ в (2.38) взято так, чтобы $n_{m-1} < n \leqslant n_m$. Тогда первое слагаемое в (2.38) не превосходит 2^{-m}, второе не превосходит $2\|\varphi_m\|_U$. Третье оценивается с помощью (2.25) как (см. еще (2.23))

$$|s_n(x,\ d\Psi_m)| \leqslant |s_n^*(x,\ d\Psi_m)| + V(\Psi_m) \leqslant (\nu_m + 1)\|\varphi_m\|_C + 2\pi \|\varphi'_m\|_C.$$

Для четвертого из (2.24) выводим оценку через

$$n_m^2 \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \|\Phi_\mu - \Psi_\mu\|_C \leqslant n_m^2 \sum_{\mu=m+1}^{\infty} n_{\mu-1}^{-2} 2^{-(\mu+1)} \leqslant 2^{-m}.$$

Таким образом, мы получили неравенство

$$|s_n(x, d(\Phi-\Psi))| \leqslant 2^{1-m} + (\nu_m+1)\|\varphi_m\|_C + \\ + 2\pi\|\varphi_m'\|_C + 2\pi\|\varphi_m\|_U + \sum_{\mu=m+1}^{\infty}\|\varphi_\mu\|_C$$

при $n_{m-1} < n \leqslant n_m$ и $m \geqslant m_0$. В силу (2.19), (2.15) и (2.14) правая часть (2.39) стремится к нулю при $n\to\infty$ для почти всех $x \in T$. Лемма доказана.

§ 3. Основная теорема

Теорема 1. *Пусть функция $\sigma \in \Sigma$ удовлетворяет условиям*

$$\sigma(16h) \leqslant 2\sigma(h), \tag{3.1}$$

$$\int_0^1 \sigma^2(t)\frac{dt}{t} = \infty. \tag{3.2}$$

Тогда для любой функции $f \in L^0$ существует функция $F \in C_{2\pi}$ со свойствами

1) *$F'(x) = f(x)$ п. в. на T;*

2) *$S[dF]$ п. в. на T сходится к f;*

3) *$\omega_2(h, F) \leqslant h\sigma(h)$, $0 < h \leqslant \pi$.*

Доказательство. По теореме Н. Н. Лузина о C-свойстве можно построить последовательность совершенных множеств $\{P_n\}$ и функций $\{u_n\} \subset C_{2\pi}$ так, чтобы

$$P_n \cap P_m = \varnothing \quad (n \neq m), \tag{3.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |P_n| = 2\pi, \tag{3.4}$$

$$u_n(x) = f(x) \text{ при } x \in P_n. \tag{3.5}$$

При этом можно считать, что точки 0 и 2π не принадлежат этим множествам и что среди интервалов $\{I_{ni}\}$, смежных ко множеству P_n, интервал I_{n1} имеет левым концом 0, а I_{n2} — правым концом 2_π. Положим

$$d_1 = 1,\ d_n = \min\{d(P_\nu, P_n),\ d(0, P_\mu), \\ d(2\pi, P_\mu) : \nu = 1, \ldots, n-1;\ \mu = 1, \ldots, n\},\ n \geqslant 2. \tag{3.6}$$

В силу (3.3) $d_n > 0$. Для каждого n выберем номер $i_n \geqslant 2$ настолько большим, чтобы

$$|I_{ni}| < d_n \text{ при } i > i_n, \tag{3.7}$$

$$\sum_{i=i_n+1}^{\infty} |I_{ni}| \leqslant |P_n|. \tag{3.8}$$

Обозначим через Δ_{ni} $(i = 1, \ldots, i_n - 1)$ сегменты, получающиеся из T удалением интервалов I_{ni} $(i = 1, \ldots, i_n)$, и пусть

$$\varepsilon_n' = \min\{|\Delta_{ni}| : i = 1, \ldots, i_n - 1\},\ \ \varepsilon_n^2 = \min\{|I_{ni}| : i = 1, \ldots, i_n\}, \\ \varepsilon_n = \min\{\varepsilon_n^1, (1/3)\varepsilon_n^2, d_n\}. \tag{3.9}$$

Обозначим через J_{ni} $(i = 3, \ldots, i_n)$ интервал длины $|I_{ni}| - 2\varepsilon_n$ концентрический с I_{ni}; J_{n1} и J_{n2} получаются удалением от правого края I_{n1} (соответственно от левого края I_{n2}) отрезка длины ε_n,

$$J_n = \bigcup_{i=1}^{i_n} J_{ni},\ \ \Delta_n = \bigcup_{i=1}^{i_n-1} \Delta_{ni}.$$

Построим по индукции две последовательности функций $\{f_n\}$ и $\{\varphi_s\}$. Пусть функции $f_1, \ldots, f_{n-1}$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_{s_n}$ уже определены, выберем тогда число $\eta_n > 0$ так, чтобы

$$\eta_n < \frac{1}{2}\varepsilon_n, \tag{3.10}$$

$$\eta_n \left\| u_n - \sum_{\nu=1}^{n-1} f_\nu \right\|_C < 2^{-4}\frac{\varepsilon_n}{n}. \tag{3.11}$$

Присоединим к каждому из отрезков Δ_{ni}, $i=1, \ldots, i_{n-1}$, слева и справа по отрезку длины l_{ni}, $\frac{1}{2}\eta_n < l_{ni} < \eta_n$, так, чтобы у полученных отрезков D_{ni}, $i=1, \ldots, i_n-1$, концы принадлежали Q,

$$D_n = \bigcup_{i=1}^{i_n-1} D_{ni}.$$

Далее, разобьем D_n точками из Q на отрезки δ равной длины, меньшей, чем $\frac{1}{2}\eta_n$. С каждой парой таких отрезков δ и δ', имеющих общую точку, свяжем непрерывную кусочно-линейную функцию λ, равную 1 в общей точке δ и δ' и равную нулю вне $\delta \cup \delta'$. Занумеруем все такие функции по возрастанию их точек максимума — пусть это будут функции λ_{nj}, $j=1, \ldots, s_{n+1}-s_n$.

Положим $\left(\text{ниже } \sum_{\nu=1}^{0} = 0\right)$

$$f_n = \left[u_n - \sum_{\nu=1}^{n-1} f_\nu\right] \sum_{j=1}^{s_{n+1}-s_n} \lambda_{nj} \tag{3.12}$$

и

$$\varphi_{s_n+j} = \left[u_n - \sum_{\nu=1}^{n-1} f_\nu\right] \lambda_{nj} \; (j=1, \ldots, s_{n+1}-s_n). \tag{3.13}$$

Из (3.12) и (3.13) следует, что

$$f_n = \sum_{s=s_n+1}^{s_{n+1}} \varphi_s. \tag{3.14}$$

Прежде чем переходить к очередным построениям, отметим некоторые факты, необходимые для дальнейшего. Из построения множеств D_n и J_n следует (см. (3.10)), что

$$d(J_n, D_n) \geqslant \varepsilon_n/2. \tag{3.15}$$

Если обозначить через $\tilde{D}_n = T \setminus J_n$, то $D_n \subset \tilde{D}_n$ и $|\tilde{D}_n| \leqslant 3|P_n|$ (см. (3.8) и (3.9)). Поэтому в силу (3.4)

$$|\liminf J_n| = 2\pi. \tag{3.16}$$

Докажем теперь, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x) = f(x) \text{ при } x \in P \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n. \tag{3.17}$$

Если $x \in P_n$, то в силу включения $P_n \subset D_n$ и (3.5) $\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x) = f(x)$, а при

$m>n$ из (3.6), (3.7) и (3.9) следует $P_n \subset J_m$, поэтому $f_m(x)=0$. Таким образом,

$$\sum_{\nu=1}^{m} f_\nu(x) = f(x) \text{ при } x \in P_n, \ m \geqslant n. \tag{3.18}$$

Пусть снова $x \in P$ и $k > s_{n+1}$, тогда (см. (3.14))

$$\sum_{s=1}^{k} \varphi_s(x) = \sum_{\nu=1}^{m-1} f_\nu(x) + \sum_{s=s_m+1}^{k} \varphi_s(x),$$

где $m>n$ определяется из неравенств $s_m < k \leqslant s_{m+1}$. Но носитель функции $\sum\limits_{s=s_m+1}^{k} \varphi_s$ содержится в D_m, в то же время $P_n \cap D_m = \varnothing$ при $m>n$. Следовательно, в силу (3.18)

$$\sum_{s=1}^{k} \varphi_s(x) = f(x) \text{ при } x \in P_n, \ k > s_{n+1}$$

и (3.17) доказано.

Переходим к дальнейшим построениям с помощью основной леммы 4. Положим

$$\Phi_s(x) = \int_0^x \varphi_s(t)\, dt.$$

Используя лемму 4, можно построить последовательности функций $\{\Psi_s\} \subset C$, номеров $\{N_s \uparrow \infty\}$ и измеримых множеств $\{E_s\}$ так, чтобы выполнялись следующие условия

$$\operatorname{supp}(\Phi_s - \Psi_s) \subset D_n \quad (s_n < s \leqslant s_{n+1}), \tag{3.19}$$

$$\Psi_s'(x) = 0 \text{ п. в. на } T, \tag{3.20}$$

$$V(\Psi_s) \leqslant 2\|\varphi_s\|_1, \tag{3.21}$$

$$\left| \sum_{s=1}^{k} s_N(x, d(\Phi_s - \Psi_s)) - \sum_{s=1}^{k} \varphi_s(x) \right| < \frac{1}{k+1}, \ x \in E_k, \ N \geqslant N_k, \tag{3.22}$$

$$|E_k| > 2\pi - k^{-2}, \tag{3.23}$$

$$\|\Phi_s - \Psi_s\|_\sigma \leqslant \min\{(N_{s-1}s)^{-2}, \ \varepsilon_n (n^2 s_{n+1})^{-1}\}, \ s_n < s \leqslant s_{n+1}. \tag{3.24}$$

При этом условия (3.22) и (3.23) получаются с помощью условия 5) леммы 4 и теоремы Д. Ф. Егорова.

Построив такие последовательности, положим

$$F = \sum_{s=1}^{\infty} (\Phi_s - \Psi_s). \tag{3.25}$$

В силу (3.24) и (3.19) ряд сходится в $C_{2\pi}$. Положим

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt; \ \chi_n = \sum_{s=s_n+1}^{s_{n+1}} \Psi_s, \ R_n = F_n - \chi_n. \tag{3.26}$$

Тогда из 3.24 вытекает неравенство

$$\|R_n\|_C \leqslant \varepsilon_n n^{-2}. \tag{3.27}$$

Кроме того, из (3.26) и (3.19) следует

$$R_n(x) = 0 \text{ при } x \in J_n. \tag{3.28}$$

Положим

$$\mathscr{E}_1=\left(P\diagdown\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in T\colon \chi_n'(x)\neq 0\}\right)\bigcap \liminf J_n.$$

Из (3.4), (3.16), (3.20) и (3.26) следует, что $|\mathscr{E}_1|=2\pi$.

Зафиксируем $x\in\mathscr{E}_1$ и найдем n_0 так, что $x\in J_n$ при $n\geqslant n_0$. Для $h\neq 0$ в силу (3.28) имеем

$$\Delta_h F(x)=\sum_{n=1}^{N}\Delta_h R_n(x)+\sum_{n=N+1}^{\infty}R_n(x+h),\ N\geqslant n_0.$$

Если при некотором $n\geqslant n_0$ будет $R_n(x+h)\neq 0$, то так как $x\in J_n$, то (см. (3.15)) $x+h\in D_n$ и $|h|\geqslant\varepsilon_n/2$, поэтому

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}h^{-1}R_n(x+h)\right|\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{n^2}\frac{2}{\varepsilon_n}\leqslant\frac{2}{N}.$$

Таким образом, при $h\neq 0$ и $N\geqslant n_0$

$$\left|\frac{\Delta_h F(x)}{h}-\sum_{n=1}^{N}\frac{\Delta_h R_n(x)}{h}\right|\leqslant\frac{2}{N},$$

Так как $\chi_n'(x)=0$ для всех n, то (см. (3.26))

$$\left|DF(x)-\sum_{n=1}^{N}f_n(x)\right|\leqslant 2/N,$$

где $DF(x)$ — любое из чисел Дини для F в точке x. Из (3.17) получаем, что $F'(x)=f(x)$ при $x\in\mathscr{E}_1$.

Докажем, что $S[dF]$ почти всюду сходится к f. Пусть

$$\mathscr{E}_2=\liminf E_s\bigcap\liminf J_n,$$

тогда $|\mathscr{E}_2|=2\pi$ в силу (3.16) и (3.23). Зафиксируем $x\in\mathscr{E}_2$ и возьмем n_0 настолько большим, чтобы $x\in J_n$ при $n\geqslant n_0$ и возьмем $s_0>s_{n_0}$ так, чтобы $x\in E_s$ при $s\geqslant s_0$. Если $N>N_{s_0}$, то найдутся $k>s_0$ и $n>n_0$ с $N_{k-1}<N\leqslant N_k$, $s_n<k\leqslant s_{n+1}$. Тогда в силу равномерной сходимости ряда (3.25)

$$s_N(x,dF)=\sum_{s=1}^{k-1}s_N(x,d(\Phi_s-\Psi_s))+s_N(x,d(\Phi_k-\Psi_k))+\sum_{s=k+1}^{\infty}s_N(x,d(\Phi_s-\Psi_s)).$$

Так как $N>N_{k-1}$, то первое слагаемое отличается от $\sum_{s=1}^{k-1}\varphi_s(x)$ меньше, чем на k^{-1} (см. (3.22)). Так как $x\in J_n$, то из (3.19) и (3.13) следует, что расстояние от x до носителя $\Phi_k-\Psi_k$ не меньше, чем $\varepsilon_n/2$, поэтому (см. лемму 2 на с. 855 в [6]) из (3.11), (3.13) и (3.21) получаем

$$|s_N(x,d(\Phi_k-\Psi_k))|\leqslant 2V(\Phi_k-\Psi_k)/\varepsilon_n\leqslant 2^5\eta_n\|\varphi_k\|_C/\varepsilon_n<n^{-1}.$$

Наконец, из (3.24) вытекает после интегрирования по частям

$$\left|\sum_{s=k+1}^{\infty}s_N(x,d(\Phi_s-\Psi_s))\right|\leqslant N_k^2\sum_{s=k+1}^{\infty}\|\Phi_s-\Psi_s\|_C\leqslant k^{-1}.$$

Таким образом, мы получили неравенство

$$\left|s_N(x,dF)-\sum_{s=1}^{k-1}\varphi_s(x)\right|\leqslant 2/k+1/n,$$

но $k\to\infty$ и $n\to\infty$ при $N\to\infty$, поэтому из (3.17) следует

$$\lim_{N\to\infty} s_N(x, dF) = f(x), \quad x \in \mathscr{E}_2.$$

Наконец, условие 3) сразу следует из (3.24). Теорема доказана.

Остановимся теперь на вопросе о роли условий (3.1) и (3.2) в теореме 1. В работе [11] фактически доказано (см. также [12, с. 191—192]), что при условии

$$\int_0^1 \varphi^2(t)\frac{dt}{t} < \infty$$

из $\omega_2(h, F) = O(h\sigma(h))$ вытекает, что F абсолютно непрерывна и $F' \in$ $\in BMO$. Отсюда сразу следует, что условие (3.2) в теореме 1 нельзя ослабить и в этом смысле теорема 1 окончательна. Что касается условия (3.1), то это — условие регулярности, не ограничивающее скорость убывания в нуле функции σ в рамках условия (3.2). Это видно на таком примере: (3.1) разрешает случай $\sigma(t) = t^{1/4}$, а близкий к предельному вариант выбора σ при условии (3.2) — это $\sigma(t) = (\ln 1/t)^{-1/2}$. Далее, поскольку $h\sigma(h)$ является мажорантой для $\omega_2(h, F)$, то в теореме 1 условие (3.1) опустить нельзя, его можно лишь ослабить. Отметим, что для того, чтобы в теореме 1 ослабить (3.1), достаточно сделать это в лемме 1, так как в других частях теоремы 1 оно не используется. Вероятно, окончательной заменой (3.1) в теореме 1 будет условие $\sigma(2h) \leqslant 2\sigma(h)$.

§ 4. Некоторые дополнительные замечания

4.1. Вопрос о возможной скорости убывания модуля непрерывности первого порядка функции F в теореме Н. К. Бари значительно проще вопроса, изученного в § 3. Аналог теоремы 1 для $\omega_1(h, F)$ выглядит следующим образом: *пусть* ω — *модуль непрерывности со свойством* $\lim\limits_{h\to 0} \omega(h)/h = \infty$. *Тогда для любой функции* $f \in L^0$ *существует функция* $F \in C_{2\pi}$, *удовлетворяющая условиям* 1) *и* 2) *теоремы* 1 *и* $\omega_1(h, F) \leqslant \omega(h)$.

Доказательство этого утверждения можно провести, повторяя доказательство теоремы Н. К. Бари, приведенное в книге [6, с. 854—864]. Изменение следует внести только в лемму 1 на с. 854: в ней Φ надо брать в классе W, а на χ дополнительно наложить условие $\sup\limits_h \omega_1(h, \Phi-\chi)/\omega(h) < \varepsilon$.

Таким образом, для рассмотрения первых модулей непрерывности новых идей по сравнению с теоремой Н. К. Бари не требуется.

4.2. Так как

$$\omega_k(h, F) \leqslant 2^{k-2}\omega_2(h, F), \quad h > 0,$$

при $k \geqslant 2$, то ясно, что в теореме 1 $\omega_2(h, F)$ можно заменить на $\omega_k(h, F)$ при $k \geqslant 2$. Ясно также, что такой результат окончателен в том же смысле, что и теорема 1. Поэтому рассмотрение модулей гладкости порядков больше второго не приносит ничего нового в рассматриваемый вопрос по сравнению со случаем модулей гладкости второго порядка.

4.3. Пусть Φ — выпуклая, положительная на $(0, \infty)$ возрастающая функция, $\Phi(0) = 0$. Класс V_Φ состоит из функций F, для которых

$$\sup_{0=x_0<\ldots<x_n=2\pi} \sum_{i=1}^n \Phi(|F(x_i) - F(x_{i-1})|) < \infty$$

(см., например, [6, с. 287]).

Можно ставить вопрос о принадлежности функции F в теореме Н. К. Бари классу V_Φ. Если $\lim\limits_{x\to 0} \Phi(x)/x=0$, то вопрос, по существу, сводится к рассмотренному в п. 4.1. В самом деле, если ω — модуль непрерывности, $\lim\limits_{h\to\infty} \omega(h)/h=\infty$ и ω_1 — выпуклый вверх модуль непрерывности, эквивалентный ω, то $H^\omega \subset V_{\omega_1^{-1}}$. Следовательно, в теореме Н. К. Бари можно дополнительно добиться того, чтобы $F\in V_\Phi$ для любой функции Φ с $\Phi(x)=o(x)$ при $x\to 0$. Ясно также, что в теореме Н. К. Бари нельзя потребовать, чтобы $F\in V$, ибо в таком случае $F'\in L^1$.

4.4. В связи с изложенным в предыдущем пункте естественно возникает следующий вопрос. Можно ли для $f\in L^1$ в теореме Н. К. Бари дополнительно добиться $F\in V$. Ответ оказывается положительным. Более того, ответ положителен и для теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $\sigma\in\Sigma$ удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Тогда для любой функции $f\in L^1$ существует функция $F\in V$ со свойствами* 1)—3) *из теоремы* 1 *и*

$$V(F)\leqslant A\|f\|_1.$$

Для доказательства достаточно внести некоторые изменения в построения теоремы 1, которые мы сейчас укажем, схематически сохраняя обозначения из доказательства теоремы 1. $V(\Psi)$ следует оценивать следующим образом

$$V\left(\sum_{s=1}^{\infty}\Psi_s\right)\leqslant 2\sum_{s=1}^{\infty}\|\varphi_s\|_1\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_1.$$

Далее, обозначая $\operatorname{supp} f_n=Q_n$, будем иметь

$$\|f_n\|_1\leqslant \int_{Q_n}\left|u_n-\sum_{\nu=1}^{n-1} f_\nu\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant \int_{P_n}|f|\,dt+\int_{Q_n\setminus P_n}|u_n|\,dt+\int_{P_n}\left|\sum_{\nu=1}^{n-1} f_\nu\right|dt+\int_{Q_n\setminus P_n}\left|\sum_{\nu=1}^{n-1} f_\nu\right|dt.$$

Идея дальнейших оценок состоит в следующем. При увеличении i_n и уменьшении η_n $\operatorname{supp} f_n=Q_n$ сколь угодно тесно будет облегать P_n, кроме того, при таком изменении i_n и η_n значения $|f_n(x)|$ не увеличиваются. Поэтому второе и четвертое слагаемые за счет выбора i_n и η_n можно сделать меньше, чем $2^{-n}\|f\|_1$ (в силу абсолютной непрерывности интеграла), следовательно,

$$V\left(\sum_{s=1}^{\infty}\Psi_s\right)\leqslant 4\|f\|_1+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{P_n}\left|\sum_{\nu=1}^{n-1} f_\nu\right|dt\leqslant 4\|f\|_1+2\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\bigcup\limits_{n=\nu+1}^{\infty} P_n}|f_\nu|\,dt.$$

Так как множества P_n попарно не пересекаются, слагаемые в последнем ряде можно сделать (опять по той же причине) меньше, чем $2^{-\nu}\|f\|_1$. Таким образом, можно добиться неравенства $V\left(\sum\limits_{s=1}^{\infty}\Psi_s\right)\leqslant 6\|f\|_1$. Аналогично оценивается $V\left(\sum\limits_{s=1}^{\infty}\Phi_s\right)$, следовательно, $V(F)\leqslant 12\|f\|_1$.

Уточняя эти рассуждения, в теореме 2 можно добиться оценки

$$V(F)\leqslant(2+\varepsilon)\|f\|_1,$$

где ε — любое наперед заданное положительное число. Любопытно, можно ли в теореме 2 взять $A=1+\varepsilon$. Этот вопрос представляет интерес в связи со следующей теоремой Н. Н. Лузина (см. [2, с. 96—97]): неопределенный интеграл Лебега есть единственная примитивная с наименьшей вариацией. Нам неизвестно даже, можно ли в теореме Н. К. Бари добиться того, чтобы для $f\in L^1$ было $V(F)\leqslant(1+\varepsilon)\|f\|_1$.

А. М. Олевский обратил наше внимание на следующий вариант формулировки теоремы 2: для любой функции $f\in L^1$ существует сингулярная мера $d\mu$ такая, что мера $f dx+d\mu$ имеет гладкую примитивную и ряд $S[f dx+d\mu]$ сходится к f почти всюду на T.

4.5. Напомним, что функция F называется гладкой, если $\omega_2(h, F)=o(h)$ при $h\to 0$ [13]. Из теоремы 1 вытекает такое утверждение: *любую почти всюду дифференцируемую функцию F можно представить в виде $F=F_1+F_2$, где F_1 — гладкая функция, а $F_2'(x)=0$ почти всюду.*

Известно [13], что гладкие функции обладают определенным запасом дифференциальных свойств — они дифференцируемы на множестве мощности континуум на каждом интервале и их производные на множестве существования обладают свойством Дарбу (см. также [6, с. 182]).

Это интересно, быть может, сравнить со следующим утверждением Лебега: любая функция $f\in L^0$ эквивалентна функции со свойством Дарбу. Если для $f\in L^0$ взять любую ее примитивную Н. Н. Лузина F и записать ее в виде $F=F_1+F_2$, как указано выше, то F_1' эквивалентна f и обладает свойством Дарбу на естественном множестве определения — там, где она является производной от F_1.

Литература

1. *Лузин Н. Н.* К основной теореме интегрального исчисления// Матем. сб. 1912. Т. 28. С. 266—294.
2. *Лузин Н. Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. М.: ГИТТЛ, 1951.
3. *Ульянов П. Л.* О работах Н. Н. Лузина по метрической теории функций//УМН. 1985. 40. Вып. 3. С. 15—70.
4. *Меньшов Д. Е.* Sur la representation des fonctions mesurables par des series trigonometriques//Матем. сб. 1941. Т. 9 (51). С. 667—692.
5. *Бари Н. К.* О примитивных функциях и тригонометрических рядах, сходящихся почти всюду//Матем. сб. Т. 31 (73). С. 687—702.
6. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
7. *Kahane J.-P.* Trois notes sur les ensembles parfais linéares//Enseignement Math. 1969. V. 15. P. 185—192.
8. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
9. *Матвеев В. А.* О рядах по системе Шаудера//Матем. заметки. 1967. Т. 2. С. 267—278.
10. *Garg K. M.* Characterization of absolutely continuous and singular functions//Proc. Conf. Constr. Function Theory, Aug. 24 — Sept. 3, 1969. Budapest. 1972.
11. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation//Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 415—426.
12. *Стейн Е. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
13. *Zygmund A.* Smooth functions//Duke Math. J. 1945. V. 12. P. 47—76.

Одесский государственный
университет им. И. И. Мечникова

Поступила в редакцию
19.V.1986