

УДК 539.3: 621.891

© 2005 г. А.С. КРАВЧУК

НЕЛОКАЛЬНЫЙ КОНТАКТ ШЕРОХОВАТЫХ ТЕЛ ПО ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

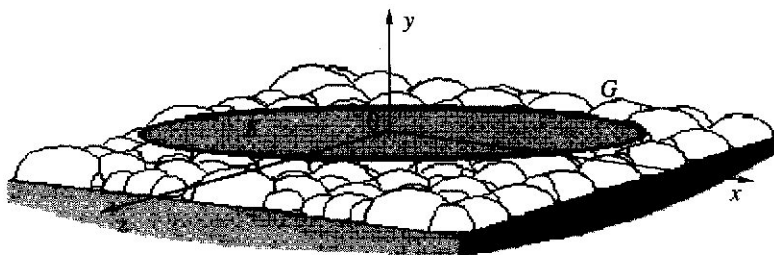
Разработана нелокальная теория контактного взаимодействия шероховатых тел по эллиптической области контакта при упругом, пластическом или упругопластическом деформировании шероховатости. С помощью метода простой итерации построены приближенные решения контактных задач для шероховатых тел в случае их контакта по эллиптической и круговой области, а также по области в виде полосы. Особенности постановки задачи и результаты ее решения подчеркивают существенную роль свойств поверхностей взаимодействующих тел в формировании области контакта при малых нагрузках.

1. Введение. Идея о необходимости учета микроструктуры поверхности деформируемых тел принадлежит И.Я. Штаерману [1]. Им введена модель комбинированного основания, согласно которой в упругом теле, кроме перемещений, вызванных действием нормального давления и определяемых решением соответствующих задач теории упругости, возникают дополнительные нормальные перемещения, обусловленные местными деформациями, зависящими от микроструктуры контактирующих поверхностей.

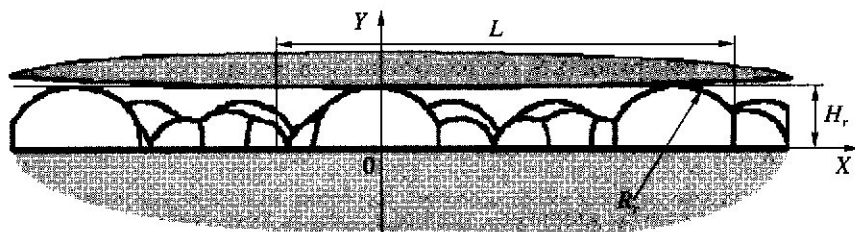
В настоящее время положение о дискретности контакта является общепризнанным [2–4]. Дискретность контакта обусловлена наличием на реальных поверхностях макроотклонений, волнистости и шероховатости, которые вызывают изменения величин контактных напряжений и сближений поверхностей взаимодействующих деталей машин. При этом величина сближения зависит не только от абсолютной высоты неровностей, но и от формы их профиля, определяемого технологией обработки рабочих поверхностей сопрягаемых деталей.

Несмотря на достаточно хорошо разработанный аппарат решения контактных задач с учетом слоя повышенной податливости [5–9], остался ряд нерешенных вопросов методического характера. Как уже отмечалось, шероховатость поверхности имеет вероятностное распределение высот. Соизмеримость размеров элемента поверхности, на котором устанавливаются статистические характеристики шероховатости, с размерами области контакта, является главной трудностью при решении поставленной задачи, которая и определяет некорректность применения некоторыми авторами непосредственно локальной степенной связи между макродавлениями и деформациями шероховатости в точке.

Следует отметить также известное решение поставленной задачи для сферических тел с использованием предположения о трансформации вида распределения давления в параболический, если деформациями упругого полупространства в сравнении с деформациями шероховатого слоя можно пренебречь [10]. Этот подход приводит к существенному усложнению интегрального уравнения и позволяет получать только численные результаты. Кроме того, авторами [10] так же использовалась уже упомянутая гипотеза о локальной степенной зависимости деформации от напряжений.



Фиг. 1



Фиг. 2

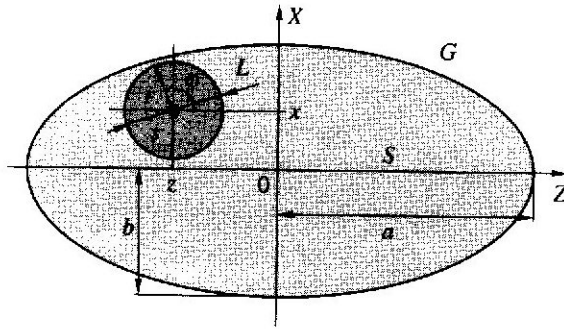
Основная идея исследования состоит в использовании структурно-феноменологического подхода. Это позволяет представить контактную задачу для реальных тел как суперпозицию двух задач: задачи деформирования шероховатости (промежуточного слоя) и контактной задачи для гладких тел [1, 2].

Статья содержит аналитические оценки решений нелокальных контактных задач для тел с изотропной шероховатостью на их поверхности, т.е. шероховатостью, имеющей одинаковые статистические характеристики в любых двух направлениях. Предполагается, что внешняя нагрузка постоянна и трение не оказывает существенного влияния на распределение нормальных напряжений в области контакта. Без ограничения общности в статье рассматривается нелокальный контакт шероховатого полупространства и гладкого криволинейного тела [2, 11, 12]. Полученные в статье результаты могут быть распространены на контактные взаимодействия криволинейных, шероховатых тел.

2. Пространственная нелокальная теория. Геометрические предположения. Шероховатость имитируется сегментами шара с постоянным радиусом R_r (фиг. 1). Распределение высот сегментов соответствует распределению высот реальной шероховатости (фиг. 2).

Рассмотрим контакт шероховатого плоского полупространства B_1 и криволинейного тела B_2 . В данной работе предполагается, что начало координат находится в точке касания твердых тел [11, 12]. Поверхность полупространства B_1 имеет шероховатость высотой H_r , которая пренебрежимо мала по сравнению с кривизной тела B_2 в точке контакта.

Характеристики шероховатости поверхности устанавливаются в любом направлении с длиной трассы L . Базовая длина L (на которой устанавливаются статистические



Фиг. 3

характеристики шероховатости) всегда значительно больше, чем высота шероховатости H_r .

С другой стороны, поверхность S_2 гладкого тела B_2 определяется уравнением [11, 12]:

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{R_x} + \frac{z^2}{R_z} \right)$$

где R_x, R_z – главные радиусы кривизны тела B_2 в начале координат.

Предположим, что $S \subset S_1$ является статистически максимальной областью контакта шероховатого и гладкого тела (фиг. 1, 2). Ее граница G (фиг. 1, 3) является эллипсом с полуосями a и b ($a \geq b$) в плоскости OXZ и определяется уравнением (фиг. 3) [2]: $x^2/b^2 + z^2/a^2 = 1$. Кроме того, необходимо выполнение условия $L/2 \leq b^2/a$, указывающего, что наименьший радиус кривизны эллипса больше половины базовой длины.

Выберем в этом случае любую точку s в области контакта S с координатами (x, z) (фиг. 3), расстояние от которой до G не меньше, чем $L/2$, и цилиндр C^* , для любой точки (x_0, z_0, y) которого выполнено неравенство:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} < L/2$$

Тогда в соответствии со сделанными ранее предположениями с учетом гипотезы о малости области контакта по сравнению с размерами тел, подповерхности $C^* \cap S_1$ и $C^* \cap S_2$ будут являться плоскими параллельными кругами.

Так как величина a теоретически не ограничена, то при дальнейших построениях будем использовать малую полуось b и эксцентриситет e ($0 \leq e \leq 1$). При этом выполняется соотношение

$$a = b / \sqrt{1 - e^2} \quad (2.1)$$

3. Относительное сближение двух плоских параллельных кругов, определяемое деформацией шероховатости. Определим среднее по элементу поверхности давление $p_L^*(x, y)$:

$$p_L^*(x, y) = \frac{4}{\pi L^2} \int_{C^* \cap S_1} \int p^*(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

где $p^*(x_0, y_0)$ – распределение микродавлений на пиках сегментов.

С другой стороны, среднее по элементу поверхности расстояние между основаниями сегментов и поверхностью S_2 гладкого тела B_2 в области контакта будет:

$$H_L^*(x, y) = \frac{4}{\pi L^2} \int_{C^* \cap S_1} \int H^*(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

где $H^*(x_0, y_0)$ – распределение расстояний от оснований сегментов до гладкой поверхности.

Будем предполагать, что разность внедрения оснований любых двух сегментов в поверхность $C^* \cap S_1$, а также пиков сегментов в поверхность $C^* \cap S_2$ являются малыми величинами по сравнению с $H_L^*(x, y)$. Напомним, что вероятностные характеристики шероховатости поверхности $C^* \cap S_1$ с центром в точке s (фиг. 3) в любом направлении равны. Тогда относительное сближение $\epsilon_L^*(x, y) = (H_r - H_L^*(x, y))/H_r$ двух параллельных круговых поверхностей при упругом, пластическом либо упругопластическом деформировании шероховатости определяется в виде [2]:

$$\epsilon_L^*(x, y) = (C_0 p_L^*(x, y))^\chi \quad (3.1)$$

где C_0, χ – параметры, определяемые характеристиками шероховатости, при этом ($0 < \chi < 1$).

С другой стороны, средняя нагрузка, приложенная к элементу поверхности со стороны гладкого тела, уравнивается средней нагрузкой, действующей на пиках микронеровностей на $C^* \cap S_1$, следовательно

$$p_L^*(x, y) = p_L(x, y), \quad p_L(x, y) = \frac{4}{\pi L^2} \int_{C^* \cap S_1} \int p(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \quad (3.2)$$

где $p(x_0, y_0)$ – распределение контактных макродавлений, т.е. решение контактной задачи для гладких тел. Поэтому равенство (3.1) выполнено и для функции $p_L(x, y)$ в области контакта.

4. Метод аналитической оценки влияния деформирования шероховатости. Представим нормальное контактное перемещение $V_{B_1}^n(x, y)$ в любой точке $s \in S \subset S_1$ как суперпозицию [3, 4]:

$$V_{B_1}^n(x, y) = V_{S_1}^n(x, y) + V_R(x, y) \quad (4.1)$$

где функция $V_{S_1}^n(x, y)$ – нормальное контактное перемещение поверхности гладкого полупространства, $V_R(x, y)$ – сближение, определяемое деформацией сегментов. Последняя функция является решением контактной задачи с однородным слоем и ее можно представить в виде $V_R(x, y) = H_r \epsilon_R(x, y)$, тогда

$$\epsilon_{R,L}(x, y) = \frac{4}{\pi L^2} \int_{C^* \cap S_1} \int \epsilon_R(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \quad (4.2)$$

Функция $V_{B_1}^n(x, y)$ является решением контактной задачи только тогда, когда средние деформации шероховатости равны средним деформациям эквивалентного поверхностного однородного слоя для любой точки $s \in S$, расстояние от которой до поверхности G не меньше $L/2$, т.е. выполнено условие $\epsilon_{R,L}(x, y) = \epsilon_L^*(x, y)$.

Таким образом, установлено, что связь между средними значениями макродавления $p_L(x, y)$ и средним значением коррекции макродеформации $\epsilon_{R,L}(x, y)$ для решения эквивалентной задачи с однородным поверхностным слоем [3, 4] имеет вид, аналогичный (3.1).

5. Решение контактной задачи для эллиптической области контакта. Определение перемещений в области контакта. Следуя теории Герца сближение в области контакта двух тел будет иметь вид:

$$V_{B_1}^n + V_{S_2}^n = \delta - \left(\frac{x^2}{2R_x} + \frac{z^2}{2R_z} \right) \quad (5.1)$$

где δ – максимальное сближение взаимодействующих тел, $V_{B_1}^n$ – перемещение в области контакта шероховатого тела B_1 , $V_{S_2}^n$ – перемещение в области контакта гладкой поверхности тела S_2 .

Однако перемещение пространства $V_{B_1}^n$ имеет вид (4.1). Тогда из (5.1) получаем

$$V_{S_1}^n + V_{S_2}^n = \delta - \left(\frac{x^2}{2R_x} + \frac{z^2}{2R_z} \right) - V_R \quad (5.2)$$

Для приближенного определения сближения V_R будем использовать выражение

$$V_R(x, z) = H_r \frac{\Delta}{2} (\alpha b^2 - x^2 - z^2 (1 - e^2)) \quad (\alpha \geq 1) \quad (5.3)$$

где Δ – усредняющие свойства шероховатой поверхности коэффициенты, определяемые ниже. Отметим, что α является безразмерной величиной.

В дальнейшем для упрощения вычислений в случае эллиптической области контакта будем предполагать, что $a \geq b \geq 1.5L$. Исходя из (4.2) и (5.3) получаем, что (фиг. 3):

$$\epsilon_{R,L}(x, z) = \frac{\Delta}{2} (\alpha b^2 - F_1(x, z, e)) \quad (5.4)$$

$$F_1(x, z, e) = \frac{4}{\pi L^2} \int_0^{2\pi/L^2} \left(\int_0^L ((x + r \sin(\varphi))^2 + (z + r \cos(\varphi))^2 (1 - e^2)) r dr \right) d\varphi$$

С другой стороны, с учетом (5.2) и (5.3) распределение давлений будет иметь вид [11, 12]:

$$p(x, z) = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi b^2} \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} (1 - e^2)} \quad (5.5)$$

где P – сила взаимодействия твердых тел, a и b – полуоси эллипса контакта. Тогда из (3.2) и (5.5) получим:

$$p_L(x, z) = \frac{3P}{2\pi b^2} \sqrt{1 - e^2} F_2(x, z, b, e) \quad (5.6)$$

Кроме того (фиг. 3):

$$F_2(x, z, b, e) = \frac{4}{\pi L^2} \int_0^{2\pi/L^2} \left(\int_0^L \sqrt{1 - \frac{(x + r \sin(\varphi))^2}{b^2} - \frac{(z + r \cos(\varphi))^2}{b^2} (1 - e^2)} r dr \right) d\varphi$$

6. Определение вспомогательных коэффициентов. Определим Δ , исходя из требования точного выполнения условия (3.1) в центре области контакта. С учетом (5.4) и (5.6) получаем

$$\Delta = 2 \left(C_0 \frac{3P}{2\pi b^2} \sqrt{1-e^2} \right)^\chi \frac{(F_2(0, 0, b, e))^\chi}{(\alpha b^2 - F_1(0, 0, e))} \quad (6.1)$$

$$\frac{F_1(0, 0, e)}{\alpha b^2} = -\frac{(2-e^2)L^2}{16\alpha b^2}$$

$$F_2(0, 0, b, e) = 1 - \frac{L^2(2-e^2)}{32b^2} + o\left(\frac{L^2}{16b^2}\right)$$

Учитывая предположение о соотношении размеров b и L , то, что постановка задачи корректна только при $\alpha \geq 1$, а также то, что $0 < \chi < 1$ из (6.1) получаем следующее приближенное равенство:

$$\Delta \approx 2 \left(C_0 \frac{3P}{2\pi b^2} \sqrt{1-e^2} \right)^\chi \frac{1}{\alpha b^2} \quad (6.2)$$

Коэффициент α будем определять, исходя из условия минимизации среднеквадратичной относительной ошибки приближения равенства (3.1) на большой и малой полуосях эллипса контакта. Подставляя (6.1) в (5.4) с учетом (3.1) и (6.2), получаем:

$$\begin{aligned} X(\alpha, b, e) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-L/2} \int_0^{b-L/2} \left(\frac{1}{\alpha b^2} \frac{\alpha b^2 - F_1(x, 0, e)}{(F_2(x, 0, b, e))^\chi} - 1 \right)^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\frac{b}{\sqrt{1-e^2}} - L/2} \int_0^{\frac{b}{\sqrt{1-e^2}} - L/2} \left(\frac{1}{\alpha b^2} \frac{\alpha b^2 - F_1(0, z, e)}{(F_2(0, z, b, e))^\chi} - 1 \right)^2 dz \right] = \\ &= \frac{1}{2\alpha^2} \left[\frac{1}{b-L/2} \int_0^{b-L/2} \left(\alpha \left\{ \frac{1}{(F_2(x, 0, b, e))^\chi} - 1 \right\} - \frac{F_1(x, 0, e)}{b^2 (F_2(x, 0, b, e))^\chi} \right)^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\frac{b}{\sqrt{1-e^2}} - L/2} \int_0^{\frac{b}{\sqrt{1-e^2}} - L/2} \left(\alpha \left\{ \frac{1}{(F_2(0, z, b, e))^\chi} - 1 \right\} - \frac{F_1(0, z, e)}{b^2 (F_2(0, z, b, e))^\chi} \right)^2 dz \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

Возводя в квадрат и приводя члены при одинаковых степенях α в (6.3), получаем следующее равенство:

$$X(\alpha, b, e) = \frac{1}{2} \left(A(b, e) - \frac{B(b, e)}{\alpha} + \frac{C(b, e)}{\alpha^2} \right) \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} A(b, e) &= \left(\frac{1}{b-L/2} \int_0^{b-L/2} \left\{ \frac{1}{(F_2(x, 0, b, e))^x} - 1 \right\}^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\frac{b}{\sqrt{1-e^2}} - L/2} \int_0^{\frac{b}{\sqrt{1-e^2}} - L/2} \left\{ \frac{1}{(F_2(0, z, b, e))^x} - 1 \right\}^2 dz \right) \\ B(b, e) &= 2 \left[\frac{1}{b-L/2} \int_0^{b-L/2} \left\{ \frac{1}{(F_2(x, 0, b, e))^x} - 1 \right\} \frac{F_1(x, 0, e)}{b^2 (F_2(x, 0, b, e))^x} dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\frac{b}{\sqrt{1-e^2}} - L/2} \int_0^{\frac{b}{\sqrt{1-e^2}} - L/2} \left\{ \frac{1}{(F_2(0, z, b, e))^x} - 1 \right\} \frac{F_1(0, z, e)}{b^2 (F_2(0, z, b, e))^x} dz \right] \\ C(b, e) &= \frac{1}{b-L/2} \int_0^{b-L/2} \left\{ \frac{F_1(x, 0, e)}{b^2 (F_2(x, 0, b, e))^x} \right\}^2 dx + \\ &\quad + \frac{1}{\frac{b}{\sqrt{1-e^2}} - L/2} \int_0^{\frac{b}{\sqrt{1-e^2}} - L/2} \left\{ \frac{F_1(0, z, e)}{b^2 (F_2(0, z, b, e))^x} \right\}^2 dz \end{aligned}$$

Утверждение. Для любых заданных (b, e) функция $X(\alpha, b, e)$ имеет единственный минимум по переменной α в точке

$$\alpha = 2C(b, e)/B(b, e) \quad (6.5)$$

и при этом выполняется неравенство $\alpha \geq 1$.

Доказательство. Отметим, что функции $F_i > 0$ ($i = 1, 2$) и $0 < F_2(x, y, b, e) \leq 1 \forall (x, y) \in S$, следовательно, коэффициенты $A(b, e) > 0$, $B(b, e) > 0$ и $C(b, e) > 0$.

С помощью непосредственного дифференцирования можно установить, что $X(\alpha, b, e)$ имеет две точки, подозрительные на экстремум: $\alpha = 2C(b, e)/B(b, e) > 0$, $\alpha_0 = 0$.

Очевидно, что в точке α_0 функция $X(\alpha, b, e)$ не ограничена. Рассмотрим подробнее его поведение в окрестности точки α , т.е. на интервале $|\alpha - \delta_0|$, $\alpha + \delta_0$. Для любой точки $\alpha_1 = \alpha + \delta$, где $|\delta| < \delta_0$, δ_0 – некоторое положительное число, такое, что $|\delta_0/\alpha| \ll 1$, имеем:

$$\begin{aligned}
 X(\alpha_1, b, e) &= \frac{1}{2} \left(A(b, e) - \frac{B(b, e)}{\alpha_1} + \frac{C(b, e)}{\alpha_1^2} \right) = \frac{1}{2} \left(A(b, e) - \frac{B(b, e)}{(\alpha + \delta)} + \frac{C(b, e)}{(\alpha + \delta)^2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(A(b, e) - \frac{B(b, e)}{\alpha} \left(1 - \frac{\delta}{\alpha} + \left(\frac{\delta}{\alpha} \right)^2 \right) + \right. \\
 &+ \frac{C(b, e)}{\alpha^2} \left(1 - 2 \frac{\delta}{\alpha} + 3 \left(\frac{\delta}{\alpha} \right)^2 \right) \left. + o \left(\left(\frac{\delta}{\alpha} \right)^2 \right) \right) = X(\alpha, b, e) + \frac{B(b, e)}{2\alpha^3} \left(\alpha - \frac{2C(b, e)}{B(b, e)} \right) e + \\
 &+ \frac{B(b, e)}{2\alpha^2} \left(\frac{3C(b, e)}{B(b, e)} - \alpha \right) \left(\frac{\delta}{\alpha} \right)^2 + o \left(\left(\frac{\delta}{\alpha} \right)^2 \right) = X(\alpha, b, e) + \frac{C(b, e)}{2\alpha^2} \left(\frac{\delta}{\alpha} \right)^2 + o \left(\left(\frac{\delta}{\alpha} \right)^2 \right)
 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Из (6.6) следует, что если выбрать достаточно малым δ_0 , то для любой точки α_1 из окрестности точки α (6.5) будет выполнено неравенство: $X(\alpha_1, b, e) \geq X(\alpha, b, e)$.

Таким образом, функция (6.4) имеет в точке α (6.5) единственный минимум.

Покажем, что $\alpha = 2C(b, e)/B(b, e) \geq 1$. Пусть $\alpha \neq 1$, тогда

$$\left(A(b, e) - \frac{B(b, e)}{\alpha} + \frac{C(b, e)}{\alpha^2} \right) \leq (A(b, e) - B(b, e) + C(b, e))$$

Упрощая далее с учетом (6.5) получаем:

$$-(\alpha - 1)^2 \leq 0 \quad (6.7)$$

Неравенство (6.7) должно выполняться для всех $\alpha > 0$, определяемых по (6.5) для функции (6.4). Из (6.7) следует, что $\alpha \geq 1$. Утверждение доказано.

Следует отметить, что получаемое с помощью (6.5) значение α изменяется в широком диапазоне и не зависит ни от механических характеристик шероховатого слоя, ни от действующей нагрузки. Значение $X(\alpha, b, e)$ позволяет контролировать точность выполнения условия (3.1).

7. Определение размеров области контакта. Область контакта в данном случае определяется совершенно аналогично случаю гладкого тела [12] с участием эксцентриситета e и усредняющих коэффициентов (6.2), (6.5), определяющих влияние шероховатости. Напомним, что a определяется в соответствии с уравнением (2.1). Для параметров b и e после некоторых тождественных преобразований получаем следующие уравнения:

$$b = f_1(b, e) \quad (7.1)$$

$$e = f_2(b, e) \quad (7.2)$$

$$f_1(b, e) = 3 \sqrt{\frac{3}{\pi} P \frac{R_\Sigma(b, e)}{E^*} L(e) \sqrt{1 - e^2}}$$

$$f_2(b, e) = \sqrt{1 - \frac{K(e) - D(e)}{D(e)} \frac{\left(\frac{1}{2R_z} - H_r \left(C_0 \frac{3P \sqrt{1 - e^2}}{2\pi b^2} \right)^x \frac{B(b, e)(1 - e^2)}{2C(b, e)b^2} \right)}{\left(\frac{1}{2R_x} - H_r \left(C_0 \frac{3P \sqrt{1 - e^2}}{2\pi b^2} \right)^x \frac{B(b, e)}{2C(b, e)b^2} \right)}}$$

$$R_\Sigma(b, e) = \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_z} - H_r \left(C_0 \frac{3P}{2\pi b^2} \sqrt{1 - e^2} \right)^x \frac{B(b, e)}{C(b, e)b^2} (2 - e^2) \right)^{-1}$$

$$E^* = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1}, \quad L(e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 (\sin(\varphi))^2} d\varphi$$

$$K(e) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 (\sin(\varphi))^2}}, \quad D(e) = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin(\varphi))^2 d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 (\sin(\varphi))^2}}$$

где E_i – модули Юнга взаимодействующих тел B_i , ν_i – коэффициенты Пуассона взаимодействующих тел B_i ($i = 1, 2$).

Очевидно, что если $H_r = 0$, то система уравнений (7.1), (7.2) определяет контакт гладких тел. Вид рассматриваемой системы позволяет без промежуточных преобразований применить при решении метод простой одношаговой итерации [13]. Как известно, для построения решения с помощью данного метода достаточно, чтобы для операторной нормы матрицы Якоби J системы (7.1), (7.2) в некотором замкнутом шаре B , содержащем ее точное решение (b^*, e^*) , было выполнено условие $\|J\| = q < 1$.

В частности, в случае использования кубической нормы для J имеем

$$q = \max_{1 \leq i \leq 2} \left\{ \max_B \left(\left| \frac{\partial}{\partial b} f_i \right| + \left| \frac{\partial}{\partial e} f_i \right| \right) \right\} < 1 \quad (7.3)$$

$$B = \left[b_0, b_0 + \frac{q}{(1-q)} |b_0 - f_1(b_0, e_0)| \right] \left[e_0, e_0 + \frac{q}{(1-q)} |e_0 - f_2(b_0, e_0)| \right]$$

где b_0, e_0 – меньшая полуось эллипса и эксцентриситет при контакте гладких тел, при получении величин которых можно использовать следующее приближенное решение при $e \in [0, 0.99]$:

$$b_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi} \frac{P}{E^* R_z + R_x} L(e_0) \sqrt{(1 - e_0^2)}}, \quad e_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{R_x}{R_z} \right)^{25/19}}$$

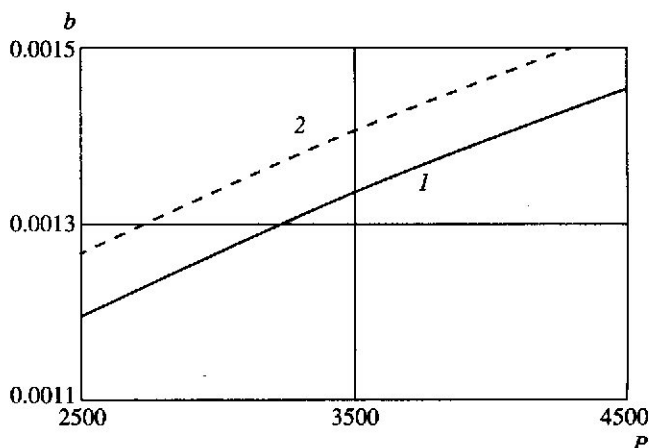
С точки зрения приложений при выполнении условия (7.3) наибольший интерес представляет первое приближение при решении системы уравнений (7.1) и (7.2), которое содержит в качестве параметров статистические характеристики шероховатости:

$$b_1 = f_1(b_0, e_0), \quad e_1 = f_2(b_0, e_0), \quad a_1 = \frac{b_1}{\sqrt{1 - e_1^2}} \quad (7.4)$$

Следует отметить, что при проведенных численных экспериментах $q < 0.3$. При этом q достигала своего максимума в точке b_0 . Относительная погрешность определения приближенных значений b и e по формулам (7.4) не превосходит 0.04. Кроме того, среднеквадратичная относительная ошибка удовлетворения условия (3.1) не превосходит 0.03.

Благодаря деформированию шероховатости размеры эллиптической области контакта и эксцентриситет увеличиваются, что очевидно объясняется тем, что влияние шероховатости растет в направлении увеличения радиуса кривизны. Так, при e , близком к 1, относительное увеличение b может не превосходить 0.02, в то время как увеличение a будет близко к 0.2.

Максимальное контактное напряжение уменьшается по сравнению с соответствующими параметрами контакта гладких тел. Характеристики шероховатости оказывают существенное влияние на относительное изменение области контакта при малых нагрузках, при увеличении нагрузки влияние шероховатости снижается.



Фиг. 4

8. Уравнение для определения области контакта, близкой к круговой ($e^2 \approx 0$). В случае контакта шероховатого и гладкого тела по области S , близкой к круговой с радиусом b (т.е. $e \leq 0.3$, $a \geq b \geq 0.95a$), область контакта определяется одним параметром, так как с достаточной точностью $b \approx a$. В этом случае $R = R_z \approx R_x$, $D(e) \approx \pi/4$, $K(e) = L(e) \approx \pi/2$. И система уравнений (7.1), (7.2) сводится к одному нелинейному уравнению, которое после преобразований принимает вид:

$$b = f_S(b) \quad (8.1)$$

$$f_S(b) = \sqrt[3]{\frac{3RP}{4E^*} + H_r R \left(C_0 \frac{3P}{2\pi} \right)^\chi \frac{B(b, 0)}{C(b, 0)}} b^{1-2\chi}$$

Если $H_r = 0$, то уравнение (8.1) определяет область контакта для гладких шара и полупространства. При решении уравнения (8.1) также будем использовать метод простой одношаговой итерации [13]. Его корень будем искать на отрезке

$$B = \left[b_0, b_0 + \frac{q}{(1-q)} |b_0 - f_1(b_0)| \right]$$

$$b_0 = \sqrt[3]{\frac{3RP}{4E^*}}, \quad q = \max_b \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial b} f_1(b) \right| \right\} < 1 \quad (8.2)$$

Результаты численного анализа (8.1) и (8.2) показывают, что $q < 0.3$ в широком интервале изменения параметров уравнения, и относительная погрешность определения области контакта по значению $b_1 = f_S(b_0)$ не превосходит 0.04. При этом q достигала своего максимума в точке b_0 . Кроме того отметим, что благодаря деформированию шероховатости размеры области контакта увеличиваются, а максимальное контактное напряжение уменьшается по сравнению с соответствующими параметрами контакта гладких тел. На фиг. 4 приводятся графики зависимости радиуса области контакта в [м] от P [Н]: 1 – зависимость в случае контакта гладкого шара и гладкого полупространства; 2 – зависимость в случае контакта гладкого шара и шероховатого полупространства при упругом деформировании шероховатости ($C_0 = 4.0 \cdot 10^{-11}$ м²/Н, $E^* = 1.1 \cdot 10^{11}$ Н/м², $R = 1.0 \cdot 10^{-1}$ м, $H_r = 2.0 \cdot 10^{-5}$ м, $\chi = 2/5$, $L = 0.5 \cdot 10^{-3}$ м).

Характеристики шероховатости оказывают существенное влияние на относительное изменение области контакта при малых нагрузках, при увеличении нагрузки влияние шероховатости снижается. Относительная погрешность удовлетворения условия (3.1) при численном решении задачи составляет менее 0.015.

9. Уравнение для определения области контакта близкой к линии ($e^2 \approx 1$). В случае контакта шероховатого и гладкого тела по области S близкой к линии шириной $2b$ (т.е. $0.99 \leq e \leq 1$) область контакта также определяется одним параметром. В этом случае $R_z \approx 0$, $R = R_x$, $L(e) \approx 1$, $K(e) - D(e) \approx 1$, $\lim D(e) = \infty$ при $e \rightarrow 1$.

И система уравнений (7.1)–(7.2) сводится к одному нелинейному уравнению, которое после преобразований принимает вид

$$b = f_c(b), \quad f_c(b) = \sqrt{\frac{4PR}{\pi E^*} + H_x R \left(C_0 \frac{2P}{\pi b} \right)^x \frac{B(b, 1)}{C(b, 1)}}$$

$$B(b, 1) = 2 \frac{1}{b - \frac{L}{2}} \int_0^{b - \frac{L}{2}} \left\{ \frac{1}{F_2(x, 0, b, 1)^x} - 1 \right\} \frac{F_1(x, 0, 1)}{b^2 (F_2(x, 0, b, 1))^x} dx$$

$$C(b, 1) = \frac{1}{b - \frac{L}{2}} \int_0^{b - \frac{L}{2}} \left\{ \frac{F_1(x, 0, 1)}{b^2 (F_2(x, 0, b, 1))^x} \right\}^2 dx$$

где P – нагрузка на единицу длины.

10. Заключение. Предложена нелокальная теория контактного взаимодействия шероховатых тел по эллиптической области контакта при упругом, пластическом или упругопластическом деформировании шероховатости.

С помощью метода простой итерации построены приближенные решения контактных задач для шероховатых тел в случае их контакта по эллиптической и круговой области, а также по области в виде полосы.

Особенность постановки задачи и результаты ее решения подчеркивают существенную роль свойств поверхностей взаимодействующих тел в формировании области контакта при малых нагрузках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
2. Демкин Н.Б., Рыжов Э.В. Качество поверхностей и контакт деталей машин. М.: Машиностроение, 1981. 244 с.
3. Kravchuk A.S. Power evaluation of the influence of roughness on the value of contact stress for interaction of rough cylinders // Arch. Mech. 1998. V. 50. № 6. P. 1003–1014.
4. Кравчук А.С., Чигарев А.В. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами. Минск: Технопринт, 2000. 196 с.
5. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 176 с.
6. Мартыненко М.Д., Романчик В.С. О решении интегральных уравнений контактной задачи теории упругости для шероховатых тел // ПММ. 1977. Т. 41. № 2. С. 338–343.
7. Попов Г.Я., Савчук В.В. Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта с учетом поверхностной структуры контактирующих тел // Изв. АН СССР. МТТ. № 3. С. 80–87.
8. Рабинович А.С. О решении контактных задач для шероховатых тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 1. С. 52–57.
9. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.
10. Ланков А.А. Сжатие шероховатых тел, контактные поверхности которых имеют сферическую форму // Трение и износ. 1995. Т. 16. № 5. С. 858–867.
11. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
12. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. В 3-х т. Т. 2. Некоторые задачи прикладной теории упругости. Расчеты за пределами упругости. Расчеты на ползучесть. М.: Машгиз, 1958. 974 с.
13. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. В 2-х т. Т. 1. М.: Наука, 1976. 304 с.