

УДК 539.3+612.311

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЕСТКОСТИ КОСТНОЙ ТКАНИ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ И ПОВОРОТАХ КОРНЯ ЗУБА

С.М. Босяков, К.С. Юркевич

Белорусский государственный университет, Республика Беларусь, 220030, Минск, проспект Независимости, 4, e-mail: bosiakov@bsu.by

Аннотация. В настоящей работе представлены результаты нахождения жесткостей костной ткани при поступательных перемещениях и поворотах корней зубов, возникающих при действии на зуб сосредоточенной силы или момента сил, с учетом атрофии костной ткани. В качестве примера представлены зависимости жесткостей от параметра, характеризующего атрофию костной ткани, для клыка и однокоренного премоляра.

Ключевые слова: поступательные перемещения корня зуба, повороты корня зуба, центр сопротивления, жесткость костной ткани, атрофия костной ткани.

ВВЕДЕНИЕ

В практике ортодонтической стоматологии зачастую возникают проблемы, связанные с прогнозированием перемещений и поворотов зубов при необходимости устранения различных дефектов и аномалий. В связи с этим представляется актуальной разработка соответствующей модели корня зуба в нормальной и ослабленной костной ткани. Поскольку в системе корень зуба – периодонт – костная ткань периодонт не может обеспечить необходимые перемещения и повороты для устранения аномалии зубного ряда, при построении модели целесообразно отдельно учитывать упругость периодонта и упругие характеристики костной ткани. Также следует учесть, что при устранении дефектов зубных рядов основную роль берет на себя костная ткань. Поэтому можно предположить, что общее перемещение зуба можно представить в виде суммы перемещения, обусловленного упругими свойствами периодонта, и перемещения, определенного упругостью костной ткани. Расчеты перемещений корней зубов в периодонте выполнены в монографии [2]. В настоящей работе развивается это актуальное направление, связанное с разработкой модели перемещения корня зуба как абсолютно твердого тела в костной ткани, и выполнен расчет жесткости при поступательных перемещениях и малых поворотах корня зуба с учетом атрофии костной ткани. Под атрофией в данном случае подразумевается вертикальная резорбция (рассасывание) костной ткани альвеолы [2, 4]. Необходимость учета атрофии костной ткани обусловлена тем обстоятельством, что при горизонтальной и вертикальной резорбции выносливость зуба существенно снижается и исчерпывается способность выдерживать нагрузки, развиваемые ортодонтическими аппаратами [2, 4]. Следует отметить, что вопрос определения жесткости упругих биомеханических систем традиционно является актуальным. В частности, в монографии [4]

сформулированы определения жесткости и податливости упругих систем и биоконструкций. Тем не менее расчеты жесткости костной ткани в работе [4] не выполнены.

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ КОРНЯ

Будем считать корень зуба абсолютно твердым телом, геометрическая форма которого описывается уравнением эллиптического двуполостного гиперboloида

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3 - \frac{H}{\sqrt{1+p^2} - p} \left(\sqrt{\frac{x_1^2}{a_k^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + p^2} - p \right) = 0, \quad (1)$$

где H – высота корня зуба; p – параметр, характеризующий закругление вершины корня зуба; $a_k = a_1$ при $x \leq 0$ и $a_k = a_2$ при $x > 0$, a_1 , a_2 , b – полуоси эллипса в сечении корня зуба плоскостью, проходящей по поверхности десны ($x_3 = H$). Геометрические размеры корня зуба обозначены на рис. 1.

Упругие перемещения u_1 , u_2 и u_3 костной ткани, примыкающей к корню зуба, представим в виде, позволяющем учесть неограниченное уменьшение перемещений при удалении от поверхности корня зуба:

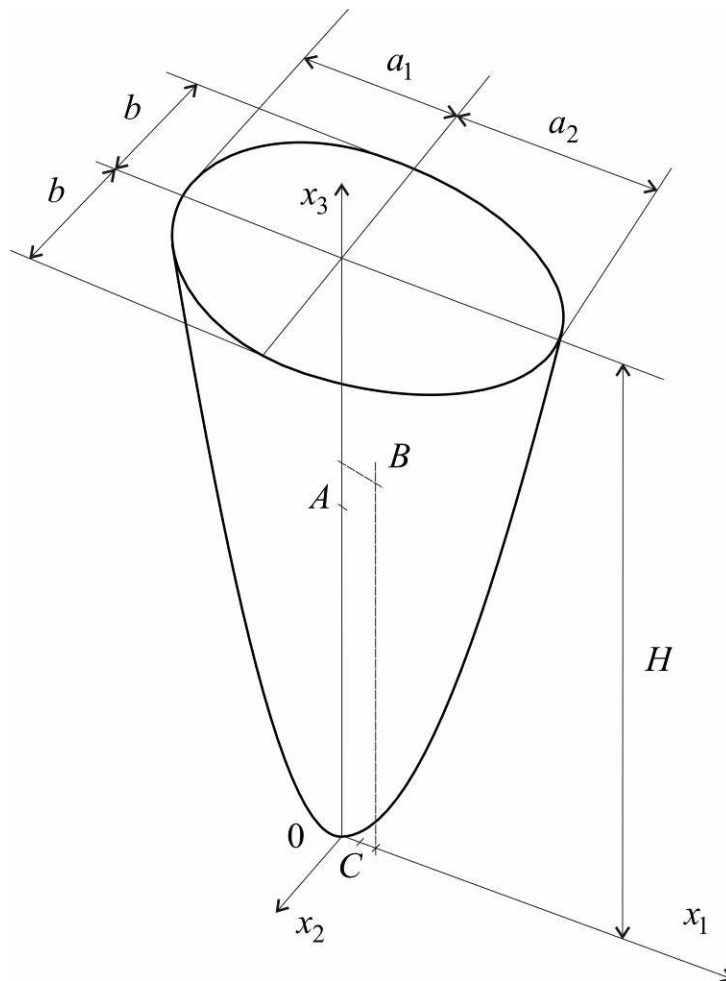


Рис. 1. Центры сопротивления корня зуба

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{H(u_1^{(0)} + \varphi_2(x_3 - x_3^{(A)}) - \varphi_3 x_2)}{H - F(x_1, x_2, x_3)}, \\
 u_2 &= \frac{H(u_2^{(0)} + \varphi_3(x_1 - x_1^{(B)}) - \varphi_1(x_3 - x_3^{(B)}))}{H - F(x_1, x_2, x_3)}, \\
 u_3 &= \frac{H(u_3^{(0)} + \varphi_1 x_2 - \varphi_2(x_1 - x_1^{(C)}))}{H - F(x_1, x_2, x_3)}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $u_k^{(0)}$ – поступательные перемещения корня вдоль осей координат; φ_k – углы поворота корня зуба относительно осей координат, $k = \overline{1, 3}$; $x_1^{(B)}$, $x_1^{(C)}$, $x_3^{(A)}$ и $x_3^{(B)}$ – координаты центров сопротивления корня. На поверхности корня зуба $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ перемещения u_1 , u_2 и u_3 совпадают с перемещениями абсолютно твердого тела. Отметим, что центрами сопротивления являются точки $A(0, 0, x_3^{(A)})$, $B(x_1^{(B)}, 0, x_3^{(B)})$ и $C(x_1^{(C)}, 0, 0)$, через которые проходят линии действия двух горизонтальных и одной вертикальной сил, под действием которых зуб получает только поступательные перемещения. Линия действия силы, проходящая через точку A , параллельна координатной оси x_1 , проходящая через точку B , – параллельна оси x_2 и проходящая через точку C , – параллельна оси x_3 . Центры сопротивления и полуоси эллипсов схематично обозначены на рис. 1.

Выпишем условия равновесия (равенство нулю главного вектора и главного момента сил, действующих на зуб, а также напряжений, возникающих на поверхности $F(x_1, x_2, x_3) = 0$) [1]:

$$\iint_F (\vec{n} \cdot \sigma) dF - \vec{P} = 0, \quad \iint_F \vec{r} \times (\vec{n} \cdot \sigma) dF - \vec{m} = 0, \tag{3}$$

где $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ – главный момент внешних сил; $\vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$ – главный вектор внешних сил; \vec{r} – радиус-вектор, проведенный из соответствующего центра сопротивления; $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – единичный вектор нормали к поверхности $F(x_1, x_2, x_3) = 0$; σ – тензор напряжений. Для изотропной среды компоненты тензора напряжений имеют вид [1]

$$\sigma_{ij} = G \left(\partial_i u_j + \partial_j u_i + \frac{2\nu \delta_{ij}}{1-\nu} \sum_{k=1}^3 \partial_k u_k \right), \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \tag{4}$$

где G – модуль сдвига костной ткани, E – модуль упругости костной ткани, ν – коэффициент Пуассона костной ткани, $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $i, j = \overline{1, 3}$. Компоненты единичного вектора нормали определяются следующим образом:

$$n_k = \frac{\partial_k F}{\Delta}, \quad \Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\partial_i F)^2}, \quad k = \overline{1, 3}. \quad (5)$$

ЖЕСТКОСТИ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Подставим компоненты единичного вектора нормали (5) и тензора напряжений (4) в условия равновесия (3) и выделим коэффициенты при поступательных перемещениях $u_k^{(0)}$ и углах поворота φ_k , $k = \overline{1, 3}$. После несложных преобразований получим следующую систему уравнений равновесия относительно трех компонент вектора поступательных перемещений и трех компонент вектора углов поворота:

$$\begin{aligned} & u_1^{(0)} c_1 + u_2^{(0)} c_{12} + u_3^{(0)} c_{13} + (s_{132} - s_{123} + x_3^{(B)} c_{12}) \varphi_1 + \\ & + \varphi_2 (s_{13} - x_3^{(A)} c_1 + s_{311} - x_1^{(C)} c_{13}) + \varphi_3 (x_1^{(B)} c_{12} - s_{211} - s_{12}) = P_1, \\ & u_1^{(0)} c_{12} + u_2^{(0)} c_2 + u_3^{(0)} c_{23} + \varphi_1 (x_3^{(B)} c_2 - s_{23} - s_{322}) + \\ & + (s_{321} - s_{123} - x_1^{(C)} c_{23} + x_3^{(A)} c_{12}) \varphi_2 + \varphi_3 (s_{122} + s_{21} - x_1^{(B)} c_2) = P_2, \\ & u_1^{(0)} c_{13} + u_2^{(0)} c_{23} + u_3^{(0)} c_3 + \varphi_1 (s_{32} - x_3^{(B)} c_{23} + s_{233}) + \\ & + \varphi_2 (x_3^{(A)} c_{13} - s_{133} + x_1^{(C)} c_3 - s_{31}) + (s_{132} - s_{231} + x_1^{(B)} c_{23}) \varphi_3 = P_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} c_i &= GH \iint_F g_i \frac{dF}{\Delta}, \quad g_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^3 (\gamma \delta_{ik} + 1) \partial_k F - \partial_i F, \\ c_{ij} &= c_{ji} = GH (\gamma - 1) \iint_F \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{dF}{\Delta}, \quad s_{ij} = GH \iint_F x_j g_i \frac{dF}{\Delta}, \\ s_{ijk} &= GH (\gamma - 1) \iint_F \frac{x_k}{m} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{dF}{\Delta}, \quad s_{jii} = GH (\gamma - 1) \iint_F \frac{x_i}{m} \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{dF}{\Delta}, \\ m &= (H - F(x_1, x_2, x_3))^2, \quad \gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}, \quad i \neq j \neq k = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Интегрирование соотношений (6) выполним с учетом атрофии костной ткани в обобщенной цилиндрической системе координат:

$$x_1 = a_k r \cos(\theta), \quad x_2 = br \sin(\theta) \quad \text{и} \quad x_3 = \frac{H(\sqrt{r^2 + p^2} - p)}{\sqrt{1 + p^2} - p},$$

где $a_k = a_1$ при $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$, $a_k = a_2$ при $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, θ – полярный угол, r – безразмерный радиус. Выражения для полуосей эллипса a_k и b на поверхности корня зуба, а также высоту H корня, находящегося в костной ткани, при атрофии представим в следующем виде:

$$a_k = a_{0k} \sqrt{s \left(s + 2p(1-s) \left(\sqrt{1+p^2} - p \right) \right)}, k = 1, 2, \quad (8)$$

$$b = b_0 \sqrt{s \left(s + 2p(1-s) \left(\sqrt{1+p^2} - p \right) \right)}, H = H_0 s,$$

где a_{0k} , b_0 – полуоси эллипса, ограничивающего профиль сечения корня зуба в норме, H_0 – высота корня зуба в норме, s – параметр, характеризующий высоту костной ткани, связанной с периодонтом ($0 \leq s \leq 1$). После несложных преобразований будем иметь

$$u_1^{(0)} c_1 + \varphi_2 \left(s_{13} - x_3^{(A)} c_1 + s_{311} - x_1^{(C)} c_{13} \right) = P_1,$$

$$u_2^{(0)} c_2 + \varphi_1 \left(x_3^{(B)} c_2 - s_{23} - s_{322} \right) + \varphi_3 \left(s_{122} + s_{21} - x_1^{(B)} c_2 \right) = P_2, \quad (9)$$

$$u_3^{(0)} c_3 + \varphi_2 \left(x_3^{(A)} c_{13} - s_{133} + x_1^{(C)} c_3 - s_{31} \right) = P_3.$$

Поскольку сила, приложенная в центре сопротивления в соответствующем направлении, вызывает только поступательное перемещение зуба, коэффициенты при углах поворотов φ_k , $k = 1, 3$ в уравнениях (9) приравняем к нулю. В результате будем иметь систему четырех уравнений для нахождения координат центров сопротивления $x_3^{(A)}$, $x_1^{(B)}$ и $x_3^{(C)}$, $x_1^{(C)}$. Решая систему, находим

$$x_3^{(A)} = \frac{c_{13} (s_{133} + s_{31}) - c_3 (s_{311} + s_{13})}{c_{13}^2 - c_1 c_3},$$

$$x_1^{(B)} = \frac{s_{122} + s_{21}}{c_2}, \quad x_3^{(B)} = \frac{s_{322} + s_{23}}{c_2},$$

$$x_1^{(C)} = \frac{c_{13} (s_{311} + s_{13}) - c_1 (s_{133} + s_{31})}{c_{13}^2 - c_1 c_3}.$$

Отсюда после интегрирования соответствующих коэффициентов (7) по поверхности (1) получим следующие выражения для координат центров сопротивления:

$$x_1^{(B)} = \frac{8a_1 a_2 (a_1 - a_2) \left(3b^2 r_1 + \gamma H^2 (1 - 3p^2 + 3p^3 \arctan(1/p)) \right)}{9\pi (b^2 H^2 + a_1 a_2 (\gamma H^2 + 2b^2 r_1) - H^2 p^2 r_2 (b^2 + \gamma a_1 a_2))}, \quad (10)$$

$$x_1^{(C)} = \frac{8a_1 a_2 (a_1 - a_2) \left(3\gamma b^2 r_1 + H^2 (1 - 3p^2 + 3p^3 \arctan(1/p)) \right)}{9\pi (b^2 H^2 + a_1 a_2 (H^2 + 2\gamma b^2 r_1) - H^2 p^2 r_2 (b^2 + a_1 a_2))}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 x_3^{(A)} = & H \left(H^2 (2 - 3p^2 - 12p^4) (a_1 a_2 + \gamma b^2) + 2a_1 a_2 b^2 (1 + \gamma + p^2 (2 - \gamma)) + \right. \\
 & + p \sqrt{1 + p^2} \left(a_1 a_2 (3H^2 (1 - 4p^2) - 2b^2 (2 - \gamma)) + 3\gamma b^2 H^2 (1 - 4p^2) \right) + \\
 & \left. + 3H^2 p^3 r_2 \left(p(3 + 4p^2) + (1 + 4p^2) \sqrt{1 + p^2} \right) (a_1 a_2 + \gamma b^2) \right) / \\
 & 3 \left(a_1 a_2 (2b^2 + H^2 r_1) + H^2 r_1 r_2 (\gamma b^2 + p^2 (a_1 a_2 + \gamma b^2)) \right)
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 x_3^{(B)} = & H \left(H^2 (2 - 3p^2 - 12p^4) (\gamma a_1 a_2 + b^2) + 2a_1 a_2 b^2 (1 + \gamma + p^2 (2 - \gamma)) + \right. \\
 & + p \sqrt{1 + p^2} \left(a_1 a_2 (3\gamma H^2 (1 - 4p^2) - 2b^2 (2 - \gamma)) + 3b^2 H^2 (1 - 4p^2) \right) + \\
 & \left. + 3H^2 p^3 r_2 \left(p(3 + 4p^2) + (1 + 4p^2) \sqrt{1 + p^2} \right) (\gamma a_1 a_2 + b^2) \right) / \\
 & 3 \left(a_1 a_2 (2b^2 + \gamma H^2 r_1) + H^2 r_1 r_2 (b^2 + p^2 (\gamma a_1 a_2 + b^2)) \right),
 \end{aligned} \tag{13}$$

где $r_1 = (\sqrt{1 + p^2} - p)^2$, $r_2 = \ln(1/p^2 + 1)$.

Система (9), в случае если силы прикладываются в центрах сопротивления вдоль соответствующих осей координат, принимает вид

$$u_k^{(0)} c_k = P_k, \quad k = \overline{1, 3}.$$

Здесь коэффициент c_k является жесткостью костной ткани при поступательном перемещении зуба вдоль координатной оси Ox_k и численно равен силе, вызывающей перемещение корня, равное 1 м. Для нахождения жесткостей c_k выполним интегрирование соответствующих выражений (7). В результате будем иметь

$$\begin{aligned}
 c_1 = & \frac{(a_1 + a_2) G \pi \left(2a_1 a_2 b^2 r_1 + H^2 (a_1 a_2 + \gamma b^2) - H^2 p^2 r_2 (a_1 a_2 + \gamma b^2) \right)}{4bH a_1 a_2 r_1}, \\
 c_2 = & \frac{(a_1 + a_2) G \pi \left(2a_1 a_2 b^2 r_1 + H^2 (\gamma a_1 a_2 + b^2) - H^2 p^2 r_2 (\gamma a_1 a_2 + b^2) \right)}{4a_1 a_2 b H r_1}, \\
 c_3 = & \frac{(a_1 + a_2) G \pi \left((a_1 a_2 + b^2) H^2 + 2a_1 a_2 b^2 \gamma r_1 - H^2 p^2 r_2 (a_1 a_2 + b^2) \right)}{4a_1 a_2 b H r_1}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Заметим, что при $s = 1$ выражения (14) определяют жесткости в норме, при $s = 0$ жесткости равны нулю. Для промежуточных значений параметра s жесткости изменяются в соответствии с уравнением поверхности корня зуба (1).

Проведем расчет жесткостей на примере клыка ($a_{10} = 2$, $a_{20} = 5$, $b_0 = 4$, $H_0 = 15,7$ мм, $p = 0,5$) и премоляра ($a_{10} = a_{20} = 5$, $b = 3,5$, $H_0 = 14,3$ мм, $p = 0,4$) [3]. Упругие свойства костной ткани характеризуются константами $E = 16,1$ ГПа, $\nu = 0,25$ [5]. На рис. 2. представлены зависимости жесткостей при поступательных перемещениях корней этих зубов от параметра s , характеризующего атрофию костной ткани.

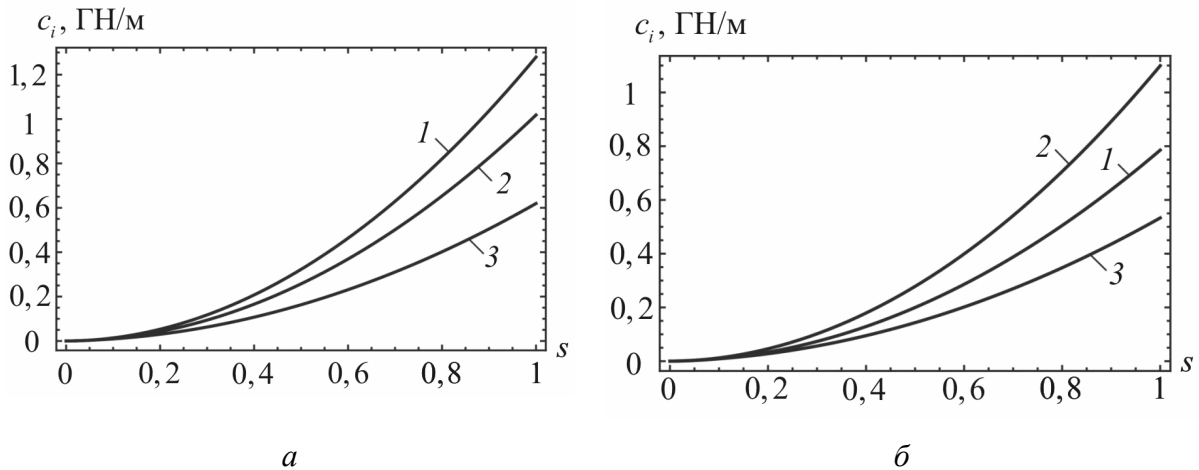


Рис. 2. Зависимости жесткостей костной ткани при поступательных перемещениях корней клыка (а) и премоляра (б) от параметра s , характеризующего атрофию костной ткани:

$$1 - c_1; 2 - c_2; 3 - c_3$$

В зависимости от величин полуосей a_k и b выполняются различные соотношения между жесткостями. В случае если $a_1 + a_2 > 2b$, имеем $c_2 > c_1$, что наблюдается для жесткостей костной ткани при поступательных перемещениях премоляра. При $2b > a_1 + a_2$ получаем $c_1 > c_2$ (результаты вычислений для клыка). Жесткости c_1 и c_2 превышают жесткость c_3 независимо от значений полуосей эллипса.

ЖЕСТКОСТИ ПРИ ПОВОРОТАХ

Для нахождения жесткостей костной ткани μ_i и μ_{ij} , $i \neq j = \overline{1, 3}$ при поворотах корня зуба выделим коэффициенты при углах поворота φ_i в уравнениях второй группы уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} c_{\varphi 1} u_1^{(0)} + s_{\varphi 12} u_2^{(0)} + s_{\varphi 13} u_3^{(0)} + \mu_1 \varphi_1 + \mu_{12} \varphi_2 + \mu_{13} \varphi_3 &= m_1, \\ s_{\varphi 21} u_1^{(0)} + c_{\varphi 2} u_2^{(0)} + s_{\varphi 23} u_3^{(0)} + \mu_{12} \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \mu_{23} \varphi_3 &= m_2, \\ s_{\varphi 31} u_1^{(0)} + s_{\varphi 32} u_2^{(0)} + c_{\varphi 3} u_3^{(0)} + \mu_{13} \varphi_1 + \mu_{23} \varphi_2 + \mu_3 \varphi_3 &= m_3. \end{aligned} \quad (15)$$

Коэффициенты системы (15) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{\varphi 1} &= s_{123} - s_{132} - x_3^{(B)} c_{12}, \quad c_{\varphi 2} = s_{231} - x_1^{(C)} c_{23} - s_{123} + x_3^{(A)} c_{12}, \\ c_{\varphi 3} &= x_1^{(B)} c_{23} + s_{132} - s_{231}, \quad s_{\varphi 12} = x_3^{(B)} c_2 - s_{23} - s_{322}, \\ s_{\varphi 13} &= s_{32} + s_{233} - x_3^{(B)} c_{23}, \quad s_{\varphi 23} = x_1^{(C)} c_3 - s_{31} + x_3^{(A)} c_{13} - s_{133}, \\ s_{\varphi 21} &= s_{13} - x_3^{(A)} c_1 + s_{311} - x_1^{(C)} c_{13}, \quad s_{\varphi 31} = x_1^{(B)} c_{12} - s_{211} - s_{12}, \\ s_{\varphi 32} &= s_{21} - x_1^{(B)} c_2 + s_{122}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mu_1 = GH \iint_F \left(g_2 (x_3 - x_3^{(B)})^2 + g_3 x_2^2 + 2(1-\gamma) x_2 (x_3 - x_3^{(B)}) \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_3} \right) \frac{dF}{\Delta}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mu_2 = GH \iint_F & \left(g_1 (x_3 - x_3^{(A)})^2 + g_3 (x_1 - x_1^{(C)})^2 + \right. \\ & \left. + 2(1-\gamma) \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_3} (x_1 - x_1^{(C)}) (x_3 - x_3^{(A)}) \right) \frac{dF}{\Delta}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\mu_3 = \frac{G}{h_0} \iint_F \left(g_2 (x_1 - x_1^{(B)})^2 + g_1 x_2^2 + 2(1-\gamma) x_2 (x_1 - x_1^{(B)}) \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) \frac{dF}{\Delta}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mu_{12} = \mu_{21} = -GH \iint_F & \frac{1}{m} \left(x_2 (x_1 - x_1^{(C)}) \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 + \gamma \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^2 \right) - \right. \\ & \left. - (1-\gamma) (x_3 - x_3^{(A)}) (x_3 - x_3^{(B)}) \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_3} + \gamma (x_1 - x_1^{(C)}) x_2 \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 + \right. \\ & \left. + (1-\gamma) \frac{\partial F}{\partial x_3} \left((x_1 - x_1^{(C)}) (x_3 - x_3^{(B)}) \frac{\partial F}{\partial x_2} + x_2 (x_3 - x_3^{(A)}) \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) \right) \frac{dF}{\Delta}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mu_{13} = \mu_{31} = -GH \iint_F & \frac{1}{m} \left((x_1 - x_1^{(B)}) (x_3 - x_3^{(B)}) \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^2 + \right. \\ & \left. + (1-\gamma) x_2 \frac{\partial F}{\partial x_3} \left((x_1 - x_1^{(B)}) \frac{\partial F}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) + \right. \\ & \left. (x_3 - x_3^{(B)}) \left((x_1 - x_1^{(B)}) \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 + \gamma \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 \right) + (1-\gamma) x_2 \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) \right) \frac{dF}{\Delta}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mu_{23} = \mu_{32} = -GH \iint_F & \frac{1}{m} \left(x_2 (x_3 - x_3^{(A)}) \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^2 - \right. \\ & \left. - (1-\gamma) (x_1 - x_1^{(C)}) \frac{\partial F}{\partial x_3} \left((x_1 - x_1^{(B)}) \frac{\partial F}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) + \right. \\ & \left. + (x_3 - x_3^{(A)}) \left(x_2 \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 + (1-\gamma) (x_1 - x_1^{(B)}) \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} + \gamma x_2 \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 \right) \right) \frac{dF}{\Delta}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь величины μ_i и μ_{ij} являются жесткостями костной ткани при поворотах корня зуба, причем жесткость μ_i численно равна моменту сил, который необходимо приложить к зубу, чтобы повернуть его на угол $\varphi_i = 1$, а жесткости μ_{ij} численно равны моменту сил, который необходимо приложить к корню зуба относительно оси x_i , чтобы повернуть его относительно оси x_j на угол $\varphi_j = 1$.

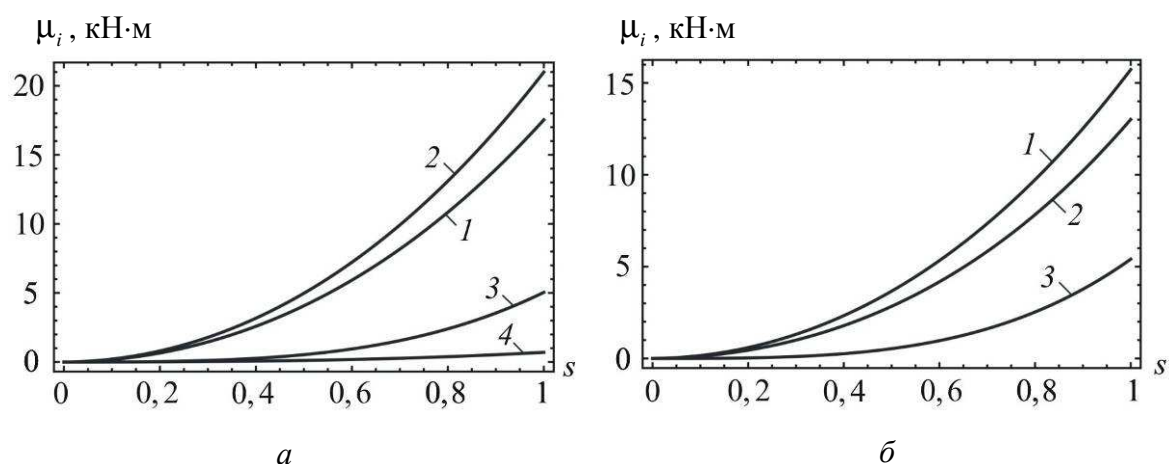


Рис. 3. Зависимости жесткостей костной ткани при поворотах корней клыка (а) и премоляра (б) от параметра s , характеризующего атрофию костной ткани: 1 – μ_1 ; 2 – μ_2 ; 3 – μ_3 ; 4 – μ_{13}

Подставляя координаты центров сопротивления (10)–(13) в соотношения (16)–(22) и интегрируя полученные выражения в обобщенных цилиндрических координатах, получаем равенство нулю всех коэффициентов (16), а также выражения для жесткостей костной ткани при поворотах зуба (в силу громоздкости результаты интегрирования не приводятся). На рис. 3 приведены зависимости жесткостей μ_i и μ_{13} , $i = \overline{1,3}$ от параметра s , характеризующего атрофию костной ткани, для клыка и премоляра (жесткости μ_{12} и μ_{23} равны нулю).

Как следует из рис. 2 и 3, численно жесткости при поворотах существенно меньше жесткостей при поступательных перемещениях. В частности, максимальное значение жесткости костной ткани μ_2 для клыка составляет ≈ 21 кН·м. Это указывает на более высокую подвижность зуба при поворотах, чем при поступательных перемещениях даже при незначительных нагрузках в виде моментов сил. При атрофии костной ткани более 50% ($s < 1/2$) жесткости при поворотах существенно уменьшаются. При профиле сечения корня зуба с одной осью симметрии все жесткости костной ткани при поворотах различаются между собой (см. рис. 3, а), тогда как при профиле корня с двумя осями симметрии жесткость μ_{13} оказывается равной нулю.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный в настоящей работе подход к определению жесткостей периодонта при поступательных перемещениях и поворотах корня зуба позволяет корректно учитывать влияние атрофии костной ткани на их значения. В частности, при полном отсутствии костной ткани соответствующие формулы приводят к нулевым значениям для жесткостей. Выражения для констант c_i , μ_i и μ_{ij} могут быть непосредственно использованы для расчета перемещений корня зуба и напряжений в костной ткани, возникающих при действии на зуб сосредоточенной силы и момента сил.

Работа выполнена в рамках инновационного проекта «Разработать методику автоматизированного проектирования и оптимизации конструкций зубочелюстных протезов и ортодонтических аппаратов при аномалиях и деформациях челюстно-лицевой области, обусловленных расщелинами губы и неба, с применением универсальных САД/САЕ/САМ-систем» Государственного комитета по науке и технологиям Республики Беларусь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
2. Наумович С.А., Крушевский А.Е. Биомеханика системы зуб–периодонт. – Минск: Экономические технологии, 2000. – 132 с.
3. Наумович С.А., Батура Р.А., Пархамович С.Н. Антропометрические данные коронок и корней зубов и их значение в стоматологии // Стоматологический журнал. – 2002. – № 2. – С. 21–22.
4. Чуйко А.Н., Вовк В.Е. Особенности биомеханики в стоматологии. – Харьков: Прапор, 2006. – 304 с.
5. Чумаченко Е.Н., Воложин А.И., Портной В.К., Маркин В.А. Гипотетическая модель биомеханического взаимодействия зубов и опорных тканей челюсти при различных значениях жевательной нагрузки // Стоматология. – 1999. – Т. 78, № 5. – С. 4–8.

DETERMINATION OF STIFFNESSES OF THE BONE TISSUE AT TRANSLATIONAL DISPLACEMENTS AND ROTATIONS OF THE TOOTH ROOT

S.M. Bosiakov, K.S. Yurkevich (Minsk, Belarus)

In the present work, results of a finding of stiffnesses of a bone tissue are presented at translational displacement and rotations of roots of the teeth arising at action on the tooth of concentrated force or the moment of forces, taking into account an atrophy of the bone tissue. As an example dependences of rigidity on the parameter which characterizes an atrophy of the bone tissue, for a canine and a single-root premolar are presented.

Key words: translational displacement of the fang, rotation of the fang, centers of strength, stiffness of the bone tissue, atrophy of the bone tissue.

Получено 15 марта 2010