

О СВОЙСТВЕ ПРОСТОЙ ПОДСТАНОВКИ ДЛЯ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК

В.В. Хомич

Москва

Настоящее сообщение посвящено изучению введенного в работе [1] свойства простой подстановки для модальных пропозициональных логик — нормальных расширений модальной пропозициональной логики $S4$ [2].

Пусть H — интуиционистское пропозициональное исчисление [3], а $S4$ — модальное пропозициональное исчисление [2]. Суперинтуиционистское пропозициональное исчисление (нормальное модальное пропозициональное расширение исчисления $S4$), получающееся из H ($S4$) путем добавления в список его аксиом конечного множества пропозициональных (модальных пропозициональных) формул K , называемых его дополнительными аксиомами, будем обозначать через $H + K$ ($S4 \oplus K$).

Пусть Y — пропозициональная или модальная пропозициональная формула, построенная из переменных b_1, \dots, b_n , а d_1, \dots, d_m — различные пропозициональные переменные. Конъюнкцию всех формул, полученных в результате всевозможных подстановок в Y вместо переменных b_1, \dots, b_n переменных d_1, \dots, d_m будем обозначать через $Y[d_1, \dots, d_m]$. Будем говорить, что исчисление $H + K$ ($S4 \oplus K$), где $K \neq \emptyset$, обладает свойством простой подстановки, если какова бы ни была формула Z , построенная из переменных d_1, \dots, d_m и выводимая в $H + K$ ($S4 \oplus K$), в H ($S4$) выводима формула $(\&_{x \in K} X[d_1, \dots, d_m]) \supset \supset Z$. Будем говорить, что логика обладает свойством простой подстановки, если им обладает некоторая ее аксиоматизация.

Модальная пропозициональная формула Y называется наследственно общезначимой в топологической булевой алгебре Θ [4], если для любого множества ее образующих Ψ верно, что из общезначимости Y в подмножестве Ψ алгебры Θ следует общезначимость Y в Θ . Топологическая булева алгебра называется вполне связной, если множество всех ее открытых элементов, отличных от выделенного, имеет наибольший элемент. Множество модальных пропозициональных формул, выводимых в исчислении $S4 \oplus X$, где X — модальная пропозициональная формула, является модальной логикой, которую будем обозначать через $L(X)$. Выражение $T(X)$ означает результат отображения пропозициональной формулы X во множество модальных пропозициональных формул (т.е. результат перевода Маккинси-Тарского) [5].

Теорема 1. *Какова бы ни была модальная пропозициональная формула Z , исчисление $S4 \oplus \Box Z$ обладает свойством простой подстановки тогда и только тогда, когда формула $\Box Z$ наследственно общезначима в каждой конечной вполне связной топологической булевой алгебре.*

Теорема 2. *Какова бы ни была пропозициональная формула Y , если исчисление $H + + Y$ не обладает свойством простой подстановки, то и исчисление $S4 \oplus T(Y)$ не обладает свойством простой подстановки.*

Теорема 3. Если модальная пропозициональная формула Z принадлежит логике $L(T(b \vee \neg b))$ и не принадлежит логике $L(T(\neg b \vee \neg\neg b))$, то модальная логика $L(Z)$ не обладает свойством простой подстановки.

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. Модальная логика $L(T((a \supset b) \vee (b \supset a)))$ не обладает свойством простой подстановки.

Литература

1. Sasaki K., Shundo S., Hosoi T. The simple substitution property for the normal modal logics // SUT J. Math. 1994. V 30, N. 2. P. 107-128
2. Фейс Р. Модальная логика. М. 1974.
3. Клини С.К. Введение в метаматематику. М., 1957.
4. Хомич В.И. О свойстве простой подстановки для суперинтуиционистских пропозициональных логик // Доклады РАН. 2000. Т. 374, № 3. С. 318–320.
5. McKinsey J. C. C., Tarski A. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting // J. Symbolic Logic. 1948. V. 13, N. 1. P. 1–13.