О ТРЕХИНДЕКСНЫХ АКСИАЛЬНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ МНОГОГРАННИКАХ С МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ТОЧЕК

Е.В. Лукшин

ИП ЭПАМ Системз, ул. В. Хоружей 29, 220035 Минск, Беларусь
e.lukshin@gmail.com

Напомним, что p-аксиальным транспортным многогранником (p-АТМ) порядка $n_1 \times \times n_2 \times \ldots \times n_p$ называется множество допустимых решений p-индексной аксиальной транспортной задачи, т.е. множество $M = M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$ матриц $x = ||x_{i_1 i_2 \ldots i_p}||_{n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p}$, элементы которых удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_{s-1}=1}^{n_{s-1}} \sum_{i_{s+1}=1}^{n_{s+1}} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_1 i_2 \ldots i_p} = a^s_{i_s} \quad \forall i_s \in N_{n_s}, \quad s \in N_p,$$

$$x_{i_1 i_2 \ldots i_p} \geqslant 0 \quad \forall (i_1, i_2, \ldots, i_p) \in N_{n_1} \times N_{n_2} \times \ldots \times N_{n_p},$$

где $a^s = (a^s_1, a^s_2, \ldots, a^s_{n_s})$, $s \in N_p$, — векторы с действительными положительными компонентами, $n_1, n_2, \ldots, n_p > 1$, $p \geqslant 2$, $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\sum_{i_s=1}^{n_s} a^s_{i_s} = k$ $\forall s \in N_p$ (число k назовем весом многогранника $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$).

В дальнейшем, говоря о p-АТМ, будем иметь ввиду многогранник $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$ порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$, заданный целочисленными векторами $a^1, a^2, \ldots, a^p$, причем будем предполагать, что $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_p \geqslant 2$.

Известно [1], что p-АТМ $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$ порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$, $n_p \geqslant 3$, и веса k имеет минимальное число целочисленных точек тогда и только тогда, когда для любого $s \in N_p$ вектор a^s является перестановкой чисел $k - n_s + 1, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n_s - 1}$. Установлено, что всякая целочисленная точка такого многогранника является его вершиной.

Обобщением теоремы 12 [1] является следующая

Теорема 1. *Всякий p-АТМ порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$, $n_p \geqslant 3$, и веса k с минимальным числом целочисленных точек имеет r-нецелочисленные вершины для любого числа $r \in \in \{4, 6, 7, \ldots, 3n_p - 5\}$, т.е. вершины, число дробных компонент у которых равно r.*

Доказано также следующее утверждение.

Теорема 2. *Матрица* $x^0 = ||x^0_{ijt}||_{n\times n\times 2}$ *с ненулевыми элементами*

$$x^0_{111} = k - n - 1 + \frac{2n-1}{n}, \quad x^0_{n12} = \frac{1}{n}, \quad x^0_{ll1} = \frac{n-1}{n}, \quad x^0_{l-1,l,2} = \frac{1}{n}, \quad l = 2,3,\ldots,n,$$

является $(2n)$*-нецелочисленной вершиной 3-АТМ* $M(a^1, a^2, a^3)$ *порядка* $n\times n\times 2$, *определенного векторами* $a^1 = (k-n+1, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1})$, $a^2 = (k-n+1, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1})$, $a^3 = (k-1, 1)$.

Литература

1. *Kravtsov M.K., Lukshin E.V.* Polyhedral combinatorics of multi-index axial transportation problems // European Journal of Operational Research. 2008. V. 189. Issue 3. P. 920–938.