ЗАДАЧА О ПРОФИЛЕ ДЛЯ ГРАФОВ ХАЛИНА

В.В. Лепин

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
lepin@im.bas-net.by

Пусть $G = (V, E)$ – неориентированный граф. *Окружением* вершины v в графе G называется множество $N(v) \triangleq \{u \in V : \{v, u\} \in E\}$.

Множество

$$N[v] \triangleq \{v\} \cup N(v)$$

называется *замкнутым окружением* вершины v в графе G.

Симметричной $n \times n$ матрице A стандартно ставится в соответствие такой неориентированный граф $G = (V, E)$, что $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и $E = \{(v_i, v_j) : i \neq j \bigwedge a_{ij} \neq 0\}$. Тогда

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (i - \min_{v_j \in N[v_i]} j),$$

где $N[v_i]$ — замкнутое окружение вершины v_i в графе G. Матрице перестановки Q соответствует такое взаимно однозначное отображение (*линейное размещение*) $f : V \to \{1, \ldots, n\}$, что $p(QAQ^T) = \sum_{v \in V}(f(v) - \min_{u \in N[v]} f(u))$.

При линейном размещении f *профильная ширина* вершины v определяется так:

$$b_f(v) \triangleq f(v) - \min_{u \in N[v]} f(u).$$

Профиль графа G *при линейном размещении* f обозначается через $p(G, f)$ и определяется так:

$$p(G, f) \triangleq \sum_{v \in V} b_f(v).$$

Профиль графа G обозначается через $p(G)$ и по определению равен минимальному значению $p(G, f)$ на всем множестве линейных размещений f графа G. Линейное размещение f называется *оптимальным (минимальным) по профилю,* если $p(G, f) = p(G)$.

Задача о профиле, т.е. задача определения профиля $p(G)$ графа G, эквивалентна задаче пополнения до графа интервалов, которая является NP-полной даже для реберных графов. Однако задача нахождения профиля дерева может быть решена за полиномиальное время. Последняя задача эквивалентна задаче об оптимальной гусеничной индексации ребер дерева.

Граф $G = (V, E)$ называется графом Халина, если он является планарным и его множество ребер можно разбить на такие два множества: A, B, $A \cup B = E$, $A \cap B = \varnothing$, что множество A индуцирует дерево T_A, не имеющее вершин степени 2, а множество B индуцирует цикл, проходящий через все листья дерева T_A. Дерево T_A называется древесной основой граф Халина.

Теорема 1. *Пусть G — граф Халина, древесной основой которого является гусеница, тогда $p(G) = 3n - 6$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф07-293).