

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Л. А. Пилипчук

ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ
ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ
НЕОДНОРОДНЫЕ ЗАДАЧИ
ПОТОКОВОГО
ПРОГРАММИРОВАНИЯ

МИНСК
БГУ
2013

УДК 519.612

Пилипчук, Л. А. Дробно-линейные экстремальные неоднородные задачи потокового программирования / Л. А. Пилипчук. – Минск : БГУ, 2013. – 235 с. – ISBN 978-985-518-837-8.

Исследуются неоднородные задачи дробно-линейного потокового программирования, которые представляют собой класс экстремальных сетевых задач нелинейного программирования. Применяются технологии решения неоднородных задач оптимизации потоков в обобщенных сетях и теория декомпозиции недоопределенных систем полного ранга. Приводятся примеры построения оптимальных решений.

Табл. 45. Ил. 56. Библиогр. : 41 назв.

*Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
Белорусского государственного университета*

Рецензенты :

доктор физико-математических наук *А. И. Калинин*;
доктор физико-математических наук *М. К. Кравцов*

ISBN 978-985-518-837-8

© Пилипчук Л. А., 2013
© БГУ, 2013

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге анализируются математические модели и методы построения оптимальных решений экстремальных дробно-линейных неоднородных задач потокового программирования, которые являются новыми во многих аспектах. Выделим наиболее важные из них.

Исследуемые математические модели дробно-линейного программирования (ДЛП) рассматриваются в исходном виде, без сведения к соответствующим моделям линейного программирования (ЛП) [10]. Для решения задачи ДЛП может быть применен метод, предложенный американскими математиками (А. Чарнс, У. Купер), – использование специального преобразования, в результате которого исходная задача ДЛП преобразуется в некоторую задачу ЛП со специальной структурой ограничений, которая может быть решена соответствующими методами линейного программирования. Затем путем обратного преобразования решения задачи ЛП получим решение исходной задачи ДЛП.

Математические модели исследуемых задач ДЛП обобщают задачи ЛП [8–10, 23, 24, 28, 30, 32, 33]. Большинство результатов сформулировано таким образом, что соответствующие результаты ЛП могут быть получены как частный случай ДЛП.

Введение опорных планов. Одной из современных идей [1–5] является введение опорных планов, в которых используются любые точки x множества планов X . Если при изменении базисного плана автоматически (по определенным правилам) изменяется и базис, то применение опорных планов, где план и опора независимы, позволяет менять план и выбирать размеры опоры произвольным образом.

Неоднородность и взаимосвязь дуговых потоков. Рассматриваются неоднородные дробно-линейные задачи потокового программирования для обобщенных сетей с взаимосвязью и преобразованием дуговых потоков различных типов.

Синтез результатов теоретических исследований типов разреженности и технологий построения численных решений. На основе результатов теоретических исследований типов разреженности [16, 19, 41] применяются концепции теории графов и теории потоков [7, 10, 17, 20], а также технологии алгоритмов декомпозиции [10, 26, 35–38] и их оптимальная реализация в конструктивных методах решения дробно-линейных неоднородных задач потокового программирования.

Теория декомпозиции недоопределенных линейных систем. В конструктивной теории решения экстремальных сетевых задач [1–5, 10, 23, 27, 30, 32, 33, 37, 38] перспективен подход, в котором максимально применяются общие принципы оптимизации для сетевой (разреженной) структуры ограничений задачи. Общая идея теории декомпозиции задач сетевой оптимизации и разреженного матричного анализа состоит в исследовании свойств разреженной части исследуемой

модели, создании эффективных алгоритмов на основе полученных теоретических результатов и их применении для исследуемой модели в целом. Автором разработана теория декомпозиции разреженных недоопределенных систем линейных алгебраических уравнений полного ранга, которая основана на использовании фундаментальных результатов теории потоков в обобщенных сетях [3, 5, 7, 17, 20] и современных достижений в технологии построения численных решений.

Монография состоит из трех глав. В первой главе описываются системы линейных алгебраических уравнений полного ранга с квадратными и прямоугольными матрицами. Рассматриваются сетевая и матричная формы разреженных систем полного ранга с квадратными матрицами, приводятся эффективные алгоритмы их решения. Для разреженных систем с прямоугольными матрицами (недоопределенных систем линейных алгебраических уравнений) даны алгоритмы декомпозиции, основанные на применении концепции теории графов и теории потоков в обобщенных мультисетях и эффективные алгоритмы построения частного решения и характеристического вектора за линейное время в наихудшем случае, приводится технология их реализации в системе компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica*. Строится общее решение разреженной недоопределенной системы линейных алгебраических уравнений полного ранга и его реализация в *Wolfram Mathematica*. Рассматриваются технологические аспекты реализации алгоритмов декомпозиции [10, 26, 35–38, 40–41] разреженных недоопределенных линейных систем полного ранга.

Во второй главе исследуются дробно-линейные неоднородные задачи потокового программирования, которые представляют собой класс экстремальных сетевых задач нелинейного программирования. Анализируется, как следует учитывать специфику нелинейных задач. Применяются результаты теоретических исследований разреженных недоопределенных линейных систем, полученные в первой главе монографии, а также концепции теории графов и теории потоков [7, 10, 17, 20, 21]. Получена формула приращения дробно-линейной целевой функции, доказан критерий оптимальности опорного мультипотока. Разработана конструктивная теория построения оптимальных решений дробно-линейных неоднородных задач потокового программирования с дополнительными ограничениями.

В третьей главе приводятся примеры применения разработанной во второй главе конструктивной теории оптимизации неоднородных потоков в обобщенных сетях, направленной на построение оптимальных решений экстремальных дробно-линейных задач потокового программирования с взаимосвязью и преобразованием дуговых потоков различных типов и ограничениями на пропускные способности дуг.

Важным приложением полученных результатов являются экстремальные задачи линейного и нелинейного программирования и задачи оптимального расположения сенсоров (Sensor Location Problem) [31, 34, 36, 39–41] в узлах графа для оценки значений дуговых потоков и переменных интенсивностей узлов всего графа.

1. РАЗРЕЖЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Приводятся алгоритмы построения решений систем линейных алгебраических уравнений полного ранга. Существенной особенностью таких систем является наличие их разреженной части. Исследуются теоретико-графовые свойства опоры обобщенной мультисети для разреженной части системы, на основе которых получены эффективные алгоритмы декомпозиции линейных систем полного ранга

1.1. Матричная форма

Рассмотрим разреженную систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{aligned}l_{1,1}x_1 + l_{1,2}x_2 &= l_{1,3}, \\l_{2,1}x_2 + l_{2,2}x_3 &= l_{2,3}, \\&\dots \\l_{n-1,1}x_{n-1} + l_{n-1,2}x_n &= l_{n-1,3}, \\l_{n,1}x_n + l_{n,2}x_1 &= l_{n,3},\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

где $l_{i,1}, l_{i,2}, l_{i,3}$, — заданные числа,

$$l_{i,1} \neq 0, l_{i,2} \neq 0, i = \overline{1, n}.$$

Предположим, что выполнены условия теоремы Кронекера — Капелли и матрица системы (1.1.1) является невырожденной. Следовательно, система (1.1.1) имеет единственное решение.

Укажем эффективный алгоритм решения системы (1.1.1) с линейной оценкой числа операций. Зафиксируем $x_1 = \tilde{x}_1$. Последовательно решая $n - 1$ первых уравнений системы (1.1.1), получим, что x_n линейно выражается через \tilde{x}_1 , то есть

$$x_n = l_1\tilde{x}_1 + l_2,\tag{1.1.2}$$

где l_1, l_2 — некоторые коэффициенты.

Подставив (1.1.2) в последнее уравнение системы (1.1.1), получим

$$x_1 = l_3\tilde{x}_1 + l_4.\tag{1.1.3}$$

В полученном уравнении (1.1.3) l_3, l_4 — некоторые коэффициенты. Рассмотрим невязку

$$\psi = x_1 - \tilde{x}_1.$$

Учитывая равенство (1.1.3), получим

$$\psi = a\tilde{x}_1 + b, \quad (1.1.4)$$

где a, b — некоторые коэффициенты.

В случае, если \tilde{x}_1 совпадает с компонентой x_1 решения системы (1.1.1), то $\psi = 0$. Причем, исходя из способа получения равенства (1.1.4), можно утверждать, что верно и обратное.

Таким образом, компонента x_1 является решением системы (1.1.1) тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$ax_1 + b = 0.$$

Так как по условию решение x_1 единственно, то $a \neq 0$, следовательно, но,

$$x_1 = -\frac{b}{a}. \quad (1.1.5)$$

Укажем способ нахождения коэффициентов a и b уравнения (1.1.5).

Положим $\tilde{x}_1 = 0$. Решая последовательно уравнения системы (1.1.1), находим численное значение невязки ψ_0 .

Таким образом, учитывая (1.1.4), получим $\psi_0 = b$.

Поступая аналогично для $\tilde{x}_1 = 1$, получаем численное значение невязки ψ_1 . Учитывая (1.1.4), имеем $\psi_1 = a + b$.

Итак, для нахождения коэффициентов a и b уравнения (1.1.5) получены соотношения:

$$\psi_0 = b, \quad (1.1.6)$$

$$\psi_1 = a + b.$$

Из системы (1.1.6) находим коэффициенты a и b . В (1.1.7) представлены численные значения коэффициентов a и b .

$$\begin{aligned} a &= \psi_1 - \psi_0; \\ b &= \psi_0. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Подставим значения коэффициентов a и b , которые вычислены через невязки согласно (1.1.7) в формулу (1.1.5). Получим истинное численное значение неизвестной x_1 системы (1.1.1). Итак, x_1 вычисляется согласно (1.1.8):

$$x_1 = \frac{\psi_0}{\psi_0 - \psi_1}. \quad (1.1.8)$$

Таким образом, указан алгоритм решения разреженной СЛАУ вида (1.1.1) за линейное время. Опишем основные шаги указанного алгоритма:

- положить $\tilde{x}_1 = \text{const } 1$ (например, $\text{const } 1 = 0$);
- решая последовательно уравнения системы в том порядке, в котором они записаны в (1.1.1), из последнего уравнения системы (1.1.1) найти x_1 ;
- вычислить невязку ψ_0 ;
- положить $\tilde{x}_1 = \text{const } 2$, $\text{const } 2 \neq \text{const } 1$ (например, $\text{const } 2 = 1$);
- вычислить невязку ψ_1 ;
- по формуле (1.1.8) вычислить истинное значение x_1 ;
- решая последовательно $n - 1$ первых уравнений системы (1.1.1), вычислить искомые значения остальных неизвестных системы (1.1.1).

1.2. Недоопределенные системы полного ранга

Рассмотрим конечную ориентированную мультисеть $G = \{I, U\}$, где I — множество узлов и U — множество мультидуг, $U \subseteq I \times I$, $|I| < \infty$, $|U| < \infty$. Пусть K , $|K| < \infty$ — множество различных типов потоков в мультисети $G = \{I, U\}$. Без ограничения общности введем множество $K = \{1, \dots, |K|\}$. Представим мультисеть $G = \{I, U\}$ в виде семейства $\{\tilde{G}^k, k \in K\}$ связанных сетей, где

$$\tilde{G}^k = (I^k, \tilde{U}^k), I^k \subseteq I, \tilde{U}^k \subseteq U.$$

Каждая связанная сеть \tilde{G}^k соответствует некоторому типу k потока в мультисети $G = \{I, U\}$.

Для каждого узла $i \in I$ мультисети $G = \{I, U\}$ введем множество $K(i)$ типов потоков, проходящих через узел i : $K(i) = \{k \in K : i \in I^k\}$.

Для каждой мультидуги $(i, j) \in U$ определим множество $K(i, j)$ типов потоков, проходящих через мультидугу (i, j) :

$$K(i, j) = \{k \in K : (i, j) \in \bar{U}^k\}.$$

Аналогично множеству $K(i, j)$ для каждой мультидуги (i, j) определим множество $K_1(i, j) = \{k \in K : (i, j) \in \bar{U}_1^k\}, \bar{U}_1^k \subseteq \bar{U}^k$.

Итак, мультисеть G (в дальнейшем будем называть просто сеть, если из контекста ясно, что речь идет о мультисети) представляет собой объединение $|K|$ сетей:

$$G^k = (I^k, U^k), U^k = \{(i, j)^k : (i, j) \in \bar{U}^k\}, k \in K.$$

Сформируем множество мультидуг $U_0, U_0 \subseteq U$, для которого выполняются неравенства:

$$|K_0(i, j)| > 1, \text{ где } K_0(i, j) = K(i, j) \setminus K_1(i, j), (i, j) \in U_0.$$

Обозначим $U_1^k = \{(i, j)^k : (i, j) \in \bar{U}_1^k\}, k \in K$. Для каждой дуги сети G^k через x_{ij}^k обозначим поток k -го типа по мультидуге (i, j) (дуговой поток k -го типа).

Для каждой дуги $(i, j)^k \in U^k$ сети $G^k = (I^k, U^k)$ введем коэффициент $\mu_{ij}^k > 0$ преобразования дугового потока $x_{ij}^k, k \in K$. В сети $G^k = (I^k, U^k)$ для каждой дуги $(i, j)^k \in U^k$ дуговой поток дуги $(i, j)^k \in U^k$ величины x_{ij}^k исходит из узла i и входит в узел j в преобразованном виде: $\mu_{ij}^k x_{ij}^k$. Сеть $G^k = (I^k, U^k)$ называется обобщенной сетью, $k \in K$, а мультисеть $G = (I, U)$ — обобщенной мультисетью (в дальнейшем — просто сетью, если из контекста ясно, что речь идет об обобщенной мультисети).

На обобщенной мультисети G рассмотрим недоопределенную систему линейных алгебраических уравнений вида (1.2.1) — (1.2.3):

$$\sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U^k)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = a_i^k, \quad i \in I^k, k \in K, \quad (1.2.1)$$

$$\sum_{(i, j) \in U} \sum_{k \in K(i, j)} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = \alpha_p, \quad p = \overline{1, q}, \quad (1.2.2)$$

$$\sum_{k \in K_0(i, j)} x_{ij}^k = z_{ij}, \quad (i, j) \in U_0, \quad (1.2.3)$$

где $I_i^+(U^k) = \{j \in I^k : (i, j)^k \in U^k\}$, $I_i^-(U^k) = \{j \in I^k : (j, i)^k \in U^k\}$;

$a_i^k, \lambda_{ij}^{kp}, \alpha_p, z_{ij}, \mu_{ij}^k \in R$ — параметры системы, $\mu_{ij}^k > 0$.

Условия существования решения системы (1.2.1) — (1.2.3) следуют из [16].

Матрица A системы (1.2.1) — (1.2.3) имеет следующую блочную структуру:

$$A = \begin{bmatrix} M \\ Q \\ T \end{bmatrix}. \quad (1.2.4)$$

Матрица M — блочно-диагональная матрица размера

$$\sum_{k \in K} |I^k| \times \sum_{k \in K} |U^k|.$$

Каждому блоку с номером $k \in K$ матрицы M соответствует матрица M_k размера $|I^k| \times |U^k|$ и обобщенная сеть $G^k = (I^k, U^k)$. Каждый столбец матрицы M_k соответствует дуге $(i, j)^k$ обобщенной сети $G^k = (I^k, U^k)$ и отличными от нуля элементами указанного столбца являются два элемента: элемент строки с номером i , равный 1, и элемент строки с номером j , равный $-\mu_{ij}^k$, $k = 1, \dots, |K|$.

Матрица Q — матрица общего вида размера $q \times \sum_{k \in K} |U^k|$ состоит из элементов λ_{ij}^{kp} , $(i, j) \in U$, $k \in K(i, j)$, $p = \overline{1, q}$.

Матрица T — разреженная матрица размера $|U_0| \times \sum_{k \in K} |U^k|$, состоящая из нулей и единиц, где все ненулевые элементы соответствуют дугам $(i, j)^k$, $(i, j) \in U_0$, $k \in K_0(i, j)$.

Рассмотрим матрицу M системы (1.2.1). Матрица M системы (1.2.1) является матрицей блочно-диагонального вида

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_{|K|},$$

где M_k — диагональный блок матрицы M , $k = 1, \dots, |K|$. Предположим, что матрица M_k — матрица полного ранга (для этого необходимо наличие хотя бы одного невырожденного цикла в сети $G^k = (I^k, U^k)$ для каждого $k \in K$ [2, 3]). Поскольку $\text{rank } M_k = |I^k|$, то выполняются соотношения:

$$\text{rank}(M) = \sum_{k=1}^{|K|} \text{rank}(M_k) = \sum_{k \in K} (|I^k|) = \sum_{k \in K} |I^k|.$$

Разреженную недоопределенную систему (1.2.1) разбиваем на $|K|$ независимых недоопределенных систем, каждая из которых соответствует диагональному блоку M_k для фиксированного $k \in K$ и имеет следующий вид:

$$\sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U^k)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = a_i^k, \quad i \in I^k \quad (1.2.5)$$

З а м е ч а н и е 1.2.1. Предположим без ограничения общности, что ранг матрицы A системы (1.2.1) – (1.2.3) равен $\sum_{k \in K} |I^k| + q + |U_0|$, где $q + |U_0|$ – число уравнений системы (1.2.2) – (1.2.3).

1.3. Теоретико-графовые свойства

Определим опору обобщенной мультисети $G = (I, U)$ для системы (1.2.1).

О п р е д е л е н и е 1.3.1. *Опорой обобщенной мультисети G для системы (1.2.1) назовем такое множество дуг $U_L = \{U_L^k \subseteq U^k, k \in K\}$, для которого система*

$$\sum_{j \in I_i^+(\hat{U}^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(\hat{U}^k)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = 0, \quad i \in I^k, k \in K \quad (1.3.1)$$

имеет только тривиальное решение для $\hat{U}^k = U_L^k$, но имеет нетривиальное решение для множества дуг $\hat{U}^k = \{U_L^k, k \in K \setminus k_0; U_L^{k_0} \cup (i, j)^{k_0}\}, (i, j)^{k_0} \notin U_L^{k_0}, k_0 \in K$.

Рассмотрим любой цикл мультисети $G = (I, U)$. Выберем в цикле произвольным образом направление обхода. Дуги цикла, которые совпадают с направлением его обхода, являются прямыми. Остальные дуги цикла – обратные.

О п р е д е л е н и е 1.3.2. *Цикл называется невырожденным, если произведение коэффициентов $\mu_{i,j}^k$ для его прямых дуг не равно произведению коэффициентов $\mu_{i,j}^k$ для обратных дуг.*

Сформулируем теоретико-графовые свойства опоры обобщенной мультисети $G = (I, U)$ для системы (1.2.1).

Теорема 1.3.1. *Множество дуг $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ является опорой мультисети $G = (I, U)$ для разреженной системы (1.2.1) тогда и только тогда, если для каждого $k \in K$ сеть $S_L^k = (I^k, U_L^k)$ является объединением t связных компонент $S_L^{k,t} = (I(U_L^{k,t}), U_L^{k,t})$, $S_L^k = \bigcup_t S_L^{k,t}$, каждая из которых содержит единственный невырожденный цикл, и выполняются соотношения:*

$$U_L^k = \bigcup_t U_L^{k,t}, \quad I^k = \bigcup_t I(U_L^{k,t}).$$

Доказательство. Используя свойства однородного потока в обобщенной сети $G^k = (I^k, U^k)$ [2] и блочно-диагональную структуру матрицы системы (1.2.1), легко доказать теорему 1.3.1. \square

Рассмотрим обобщенную мультисеть $G = (I, U)$, которая представлена на рис. 1.1 в виде объединения $|K| = 4$ сетей $G^k = (I^k, U^k)$, $k \in K$, $K = \{1, 2, 3, 4\}$, $U_0 = \emptyset$.

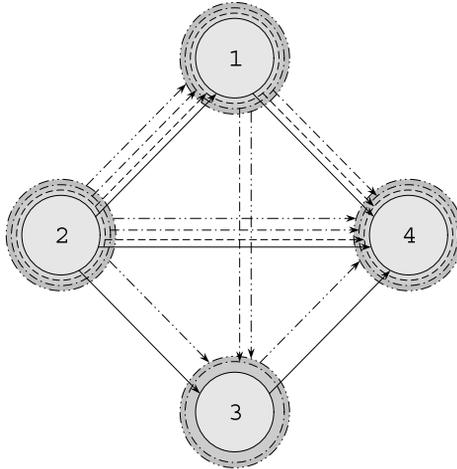


Рис. 1.1. Обобщенная мультисеть $G = (I, U)$, представленная в виде объединения $|K| = 4$ обобщенных сетей $G^k = (I^k, U^k)$, $k \in K = \{1, 2, 3, 4\}$

Для обобщенной мультисети $G = (I, U)$, которая представлена на рис. 1.1, рассмотрим разреженную недоопределенную систему (1.3.2):

$$\begin{aligned}
 x_{1,4}^1 - x_{2,1}^1 &= 0 \\
 x_{2,1}^1 + x_{2,3}^1 + x_{2,4}^1 &= 15 \\
 x_{3,4}^1 - \frac{9}{10}x_{2,3}^1 &= \frac{16}{5} \\
 -\frac{3}{5}x_{1,4}^1 - \frac{3}{10}x_{2,4}^1 - \frac{3}{10}x_{3,4}^1 &= \frac{63}{10} \\
 x_{1,4}^2 - \frac{3}{5}x_{2,1}^2 &= -\frac{1}{5} \\
 x_{2,1}^2 + x_{2,4}^2 &= 4 \\
 -\frac{7}{10}x_{1,4}^2 - \frac{1}{2}x_{2,4}^2 &= -\frac{17}{10} \\
 x_{1,3}^3 + x_{1,4}^3 - \frac{1}{10}x_{2,1}^3 &= \frac{47}{5} \\
 x_{2,1}^3 + x_{2,4}^3 &= 14 \\
 -\frac{1}{2}x_{1,3}^3 &= -\frac{7}{2} \\
 -\frac{1}{10}x_{1,4}^3 - x_{2,4}^3 &= -\frac{83}{10} \\
 x_{1,3}^4 - \frac{3}{10}x_{2,1}^4 &= \frac{57}{10} \\
 x_{2,1}^4 + x_{2,3}^4 + x_{2,4}^4 &= 2 \\
 x_{3,4}^4 - \frac{7}{10}x_{1,3}^4 - \frac{9}{10}x_{2,3}^4 &= -\frac{16}{5} \\
 -\frac{4}{5}x_{2,4}^4 - \frac{9}{10}x_{3,4}^4 &= -\frac{17}{10}.
 \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Приведем пример опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ обобщенной мультисети $G = (I, U)$ для разреженной системы (1.3.2).

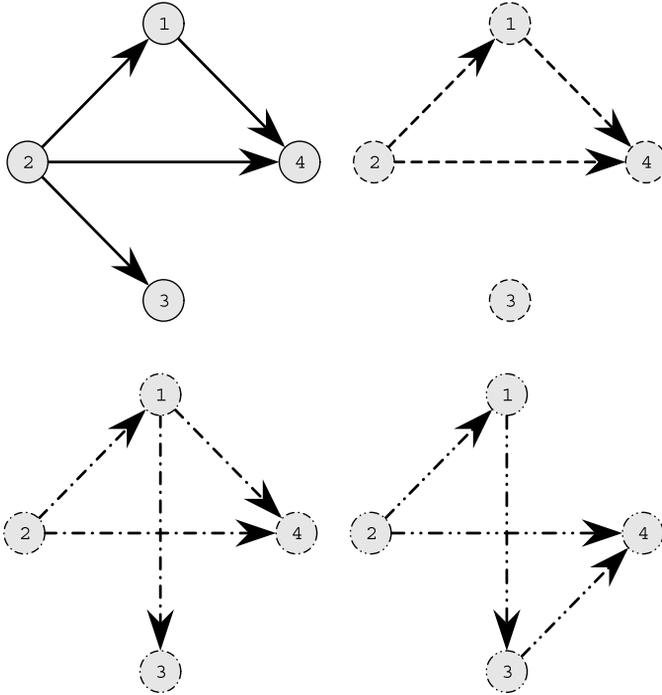


Рис. 1.2. Множество дуг опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K = \{1, 2, 3, 4\}\}$ обобщенной мультисети $G = (I, U)$ для разреженной системы (1.3.2)

На рис. 1.2 представлено множество дуг $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$, где $K = \{1, 2, 3, 4\}$, которое является опорой обобщенной мультисети G для разреженной системы (1.3.2), где

$$U_L^1 = \{(1,4)^1, (2,1)^1, (2,3)^1, (2,4)^1\},$$

$$U_L^2 = \{(1,4)^2, (2,1)^2, (2,4)^2\},$$

$$U_L^3 = \{(1,3)^3, (1,4)^3, (2,1)^3, (2,4)^3\},$$

$$U_L^4 = \{(1,3)^4, (2,1)^4, (2,4)^4, (3,4)^4\}.$$

Опора U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (1.3.2) состоит из одной компоненты связности для каждого типа потока $k \in K = \{1, 2, 3, 4\}$ (см. рис. 1.2), причем единственный цикл каждой компоненты связности является невырожденным [2, 3].

Итак, для каждого $k \in K = \{1, 2, 3, 4\}$ сеть $S_L^k = (I^k, U_L^k)$, составленная из дуг U_L^k , содержит одну компоненту связности

$$S_L^{k,t} = (I(U_L^{k,t}), U_L^{k,t}), \quad S_L^k = \bigcup_t S_L^{k,t},$$

которая покрывает все узлы сети $S_L^k = (I^k, U_L^k)$, т. е. выполняются соотношения:

$$U_L^k = \bigcup_t U_L^{k,t}, \quad I^k = \bigcup_t I(U_L^{k,t}).$$

1.4. Сетевая форма

В секции 1.1 приведен алгоритм решения разреженной системы линейных алгебраических уравнений вида (1.1.1) с квадратной невырожденной матрицей. Число операций в наихудшем случае для решения систем вида (1.1.1) пропорционально числу неизвестных системы (1.1.1). При построении решений систем вида (1.1.1) была использована их матричная форма, которая для невырожденных матриц большой размерности требует специальной формы их представления.

Применение теоретико-графовых свойств опоры U_L обобщенной сети G для разреженной системы вида (1.2.1) позволяет решать указанные системы без использования их матричной формы. С этой целью используются сетевые свойства опоры U_L обобщенной сети G для разреженной системы (1.2.1) и технология представления опоры U_L в виде коллекции корневых структур [10, 16]. Эти результаты позволяют хранить информацию о разреженных системах исследуемого типа в форме, свободной от матричной, что, естественно, увеличивает размерности решаемых задач.

Для некоторого фиксированного $k \in K$ обозначим через I_C^k , U_C^k множество узлов и множество дуг некоторого невырожденного цикла сети $S_L^k = (I^k, U_L^k)$, где U_L^k — множество дуг опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ обобщенной мультисети $G = (I, U)$ для разреженной системы (1.2.1).

Рассмотрим разреженную систему линейных уравнений (1.4.1), которая является частным случаем системы линейных уравнений (1.1.1).

$$\sum_{j \in I_i^+(U_C^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U_C^k)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = b_i^k, \quad i \in I_C^k. \quad (1.4.1)$$

Разреженная система (1.4.1) представлена в форме, свободной от матричной, что не требует специального способа упаковки невырожденной матрицы разреженной системы (1.4.1).

Линейный алгоритм решения системы (1.4.1) используется для построения решений разреженных систем на итерациях методов построения оптимальных решений линейных и дробно-линейных экстремальных задач потокового программирования, например для вычисления компонент характеристических векторов, которые соответствуют дугам невырожденного цикла, а также для построения частных решений разреженных систем вида (1.2.5) для фиксированного k . Число операций построения решений указанных разреженных систем пропорционально числу неизвестных.

1.5. Характеристические векторы

Рассмотрим однородную систему линейных алгебраических уравнений (1.5.1), порожденную из системы (1.2.5):

$$\sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U^k)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = 0, \quad i \in I^k. \quad (1.5.1)$$

Введем в рассмотрение характеристический вектор $\delta^k(\tau, \rho)$, порожденный дугой $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$ для фиксированного $k \in K$ относительно опоры U_L^k сети $G^k = \{I^k, U^k\}$, где

$$\delta^k(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^k(\tau, \rho), (i, j)^k \in U^k).$$

Компоненты характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$ являются решением следующей разреженной линейной системы:

$$\sum_{j \in I_i^+(B_{\tau\rho}^k)} \delta_{ij}^k(\tau, \rho) - \sum_{j \in I_i^-(B_{\tau\rho}^k)} \mu_{ji}^k \delta_{ji}^k(\tau, \rho) = 0, \quad (1.5.2)$$

$$i \in I^k, B_{\tau\rho}^k = U_L^k \cup (\tau, \rho)^k,$$

$$\delta_{\tau\rho}^k(\tau, \rho) = 1, \delta_{ij}^k(\tau, \rho) = 0, (i, j)^k \in U^k \setminus (U_L^k \cup (\tau, \rho)^k). \quad (1.5.3)$$

Определение 1.5.1. Совокупность дуг $B_{\tau\rho}^k = U_L^k \cup (\tau, \rho)^k$ назовем *бициклом*, порожденным дугой $(\tau, \rho)^k$ относительно опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (1.2.1)

Покажем, что система (1.5.2), (1.5.3) однозначно разрешима. Система (1.5.2), (1.5.3) равносильна системе (1.5.4), (1.5.5).

$$\sum_{j \in I_i^+(B_{\tau\rho}^k \setminus (\tau, \rho)^k)} \delta_{ij}^k(\tau, \rho) - \sum_{j \in I_i^-(B_{\tau\rho}^k \setminus (\tau, \rho)^k)} \mu_{ji}^k \delta_{ji}^k(\tau, \rho) =$$

$$= \begin{cases} 0, & i \in I^k \setminus \{\tau, \rho\}, \\ -1, & i = \tau, \\ \mu_{\tau\rho}^k, & i = \rho, i \in I^k, B_{\tau\rho}^k = U_L^k \cup (\tau, \rho)^k, \end{cases} \quad (1.5.4)$$

$$\delta_{\tau\rho}^k(\tau, \rho) = 1, \delta_{ij}^k(\tau, \rho) = 0, (i, j)^k \in U^k \setminus (U_L^k \cup (\tau, \rho)^k). \quad (1.5.5)$$

Из определения опоры следует, что матрица системы (1.5.4), (1.5.5) является невырожденной, значит, система (1.5.4), (1.5.5) имеет единственное решение.

Теорема 1.5.1. Множество $\{\delta^k(\tau, \rho), (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k\}$ характеристических векторов, где $k \in K$ фиксировано, составляет базис пространства решений однородной системы (1.5.1), порожденной системой (1.2.5).

Доказательство. Поскольку ранг системы (1.5.1) равен $|I^k|$ и число переменных равно $|U^k|$, то размерность пространства решений этой системы равна $|U^k| - |I^k|$. Значит, $|U^k| - |I^k|$ любых линейно независимых векторов-решений этой системы образуют базис ее пространства решений. Из определения характеристического вектора следует, что он является решением системы (1.5.1). Покажем, что векторы $\delta^k(\tau, \rho)$, $\delta^k(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^k(\tau, \rho), (i, j)^k \in U^k)$, $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$ линейно независимы. Составим матрицу M , строками которой являются векторы $\delta^k(\tau, \rho)$, $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$. Очевидно, что перестановкой строк и столбцов матрицу M можно привести к виду $A|E$, где E — единичная матрица размера $(|U^k| - |I^k|)(|U^k| - |I^k|)$, A — некоторая матрица. Следовательно, ранг матрицы M равен $|U^k| - |I^k|$. Это означает, что все ее строки, т. е. векторы $\delta^k(\tau, \rho)$, $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$, линейно независимы. Теорема доказана. \square

Для мультисети, изображенной на рис. 1.1, построим характеристический вектор $\delta^1(3,4)$, порожденный дугой $(3,4)^1$, относительно опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K = \{1, 2, 3, 4\}\}$ (см. рис. 1.2):

$$U_L^1 = \{(1,4)^1, (2,1)^1, (2,3)^1, (2,4)^1\}, \quad U_L^2 = \{(1,4)^2, (2,1)^2, (2,4)^2\},$$

$U_L^3 = \{(1,3)^3, (1,4)^3, (2,1)^3, (2,4)^3\}$, $U_L^4 = \{(1,3)^4, (2,1)^4, (2,4)^4, (3,4)^4\}$ для разреженной системы (1.3.2).

Итак, характеристический вектор $\delta^1(3,4)$ имеет вид:

$$\delta^1(3,4) = (\delta_{1,4}^1, \delta_{2,1}^1, \delta_{2,3}^1, \delta_{2,4}^1, \delta_{3,4}^1) = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{10}{9}, -\frac{11}{9}, 1\right).$$

Базис пространства решений однородной системы, порожденной системой (1.3.2), составляют векторы $\delta^1(3,4)$, $\delta^4(2,3)$ для $k = 1$ и $k = 4$ соответственно, где

$$\delta^1(3,4) = (\delta_{1,4}^1, \delta_{2,1}^1, \delta_{2,3}^1, \delta_{2,4}^1, \delta_{3,4}^1) = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{10}{9}, -\frac{11}{9}, 1\right);$$

$$\delta^4(2,3) = (\delta_{1,3}^4, \delta_{2,1}^4, \delta_{2,3}^4, \delta_{2,4}^4, \delta_{3,4}^4) = \left(\frac{3}{611}, \frac{10}{611}, 1, -\frac{621}{611}, \frac{552}{611} \right).$$

1.6. Технология вычисления характеристических векторов

Обозначим через U_L^k множество дуг, которым соответствуют ненулевые компоненты характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$.

Теорема 1.6.1. *Среди компонент характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$, порожденного дугой $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$, отличными от нуля являются компоненты характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$, которые соответствуют следующим множествам дуг:*

- дуги цепей, построенные в сети $S_L^k = (I^k, U_L^k)$ от узла τ и узла ρ дуги $(\tau, \rho)^k$ до соответствующих ближайших узлов невырожденного цикла (невырожденных циклов);
- дуги невырожденного цикла (невырожденных циклов) сети $S_L^k = (I^k, U_L^k)$, ближайшие узлы которого (которых) соединены указанными цепями с узлами τ и ρ (дуга $(\tau, \rho)^k$ порождает характеристический вектор $\delta^k(\tau, \rho)$);
- дуга $(\tau, \rho)^k$, которая порождает характеристический вектор $\delta^k(\tau, \rho)$.

Доказательство. Из системы (1.5.2), (1.5.3) следует, что для дуг, инцидентных висячим вершинам графа $S_L^k = (I^k, U_L^k)$ значения соответствующих компонент характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$ равны нулю. Таким образом, все дуги, инцидентные висячим вершинам, можно исключить из графа $S_L^k = (I^k, U_L^k)$. После применения конечного числа раз описанной процедуры граф $S_L^k = (I^k, U_L^k)$ не будет содержать ни одной висячей вершины, т. е. состоит только из циклов и связывающих их цепей. Теорема доказана. □

Для построения характеристических векторов необходимо для каждой дуги $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k, k \in K$ выполнить следующие действия:

- построить в бицикле $B_{\tau\rho}^k = U_L^k \cup (\tau, \rho)^k$ единственные цепи от начала τ и конца ρ каждой дуги $(\tau, \rho)^k$ до соответствующих узлов

невырожденного цикла (невырожденных циклов), и получить компоненты характеристического вектора, которые соответствуют дугам этих цепей;

- для каждой дуги невырожденного цикла (невырожденных циклов), входящей в состав множества дуг опоры U_L^k мультисети G для разреженной системы (1.2.1), вычислить компоненты характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$, $\delta^k(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^k(\tau, \rho), (i, j)^k \in U^k)$, порожденного дугой $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$ относительно множества дуг опоры U_L^k , где $k \in K$ фиксировано, которые соответствуют дугам указанного невырожденного цикла (невырожденных циклов).

Пусть U_Z^k — множество дуг, которым соответствуют ненулевые компоненты характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$. Согласно [41] в состав множества U_Z^k входят следующие дуги:

- дуги цепей, построенные в сети $S_L^k = (I^k, U_L^k)$ от узла τ и узла ρ дуги $(\tau, \rho)^k$ до соответствующих ближайших узлов невырожденного цикла (невырожденных циклов);
- дуги невырожденного цикла (невырожденных циклов) сети S_L^k , где $S_L^k = (I^k, U_L^k)$, ближайшие узлы которого (которых) соединены указанными цепями с узлами τ и ρ (дуга $(\tau, \rho)^k$ порождает характеристический вектор $\delta^k(\tau, \rho)$);
- дуга $(\tau, \rho)^k$, которая порождает характеристический вектор $\delta^k(\tau, \rho)$.

Приведем конструктивный алгоритм построения характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$. Компоненте $\delta_{\tau, \rho}^k(\tau, \rho)$ характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$, $\delta^k(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^k(\tau, \rho), (i, j)^k \in U^k)$, порожденного дугой $(\tau, \rho)^k$, присвоить единицу: $\delta_{\tau, \rho}^k(\tau, \rho) = 1$ (в сети $(I^k, U_L^k \cup (\tau, \rho)^k)$ полагаем дуговой поток по дуге $(\tau, \rho)^k$ равным единице). Для остальных дуг сети соответствующие компоненты характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$ временно положим равными нулю.

Для каждого текущего узла i цепи, ведущей к соответствующему ближайшему узлу невырожденного цикла (невырожденных циклов), разрешается уравнение относительно компоненты $\delta_{i, h}^k(\tau, \rho)$ характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^k(\tau, \rho), (i, j)^k \in U^k)$, где $(i, h)^k$ — родительская дуга узла i корневой структуры, соответствующей сети $S_L^k = (I^k, U_L^k)$.

Таким образом, компонента $\delta_{i,h}^k(\tau, \rho)$ характеристического вектора равна

$$\delta_{i,h}^k(\tau, \rho) = - \sum_{j \in I_i^+(U_{\frac{L}{2}}^k \setminus (i, h)^k)} \delta_{ij}^k(\tau, \rho) + \sum_{j \in I_i^-(U_{\frac{L}{2}}^k \setminus (i, h)^k)} \mu_{ji}^k \delta_{ji}^k(\tau, \rho), \quad (1.6.1)$$

где $U_{\frac{L}{2}}^k$ — множество дуг, которым соответствуют ненулевые компоненты характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$.

Если дуга $(h, i)^k$ — родительская дуга узла i корневой структуры, соответствующей сети $G^k = (I^k, U_L^k)$, то компонента $\delta_{h,i}^k(\tau, \rho)$ характеристического вектора равна

$$\begin{aligned} \delta_{h,i}^k(\tau, \rho) &= \\ &= \sum_{j \in I_i^+(U_{\frac{L}{2}}^k \setminus (h, i)^k)} \frac{1}{\mu_{hi}^k} \delta_{ij}^k(\tau, \rho) - \sum_{j \in I_i^-(U_{\frac{L}{2}}^k \setminus (h, i)^k)} \frac{1}{\mu_{hi}^k} \mu_{ji}^k \delta_{ji}^k(\tau, \rho). \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

Итак, первоначально все компоненты характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^k(\tau, \rho), (i, j)^k \in U^k)$ положим равными нулю. В силу ассоциативности операции сложения, проходя по дугам цепей от узла τ и узла ρ дуги $(\tau, \rho)^k$ до соответствующих ближайших узлов невырожденного цикла (невырожденных циклов) сети $S_L^k = (I^k, U_L^k)$, можно не получать, а изменять значения компонент характеристического вектора на слагаемые, зависящие от изменений компонент для предыдущей дуги. То есть получать значение компоненты характеристического вектора не за один просмотр текущего узла, используя понятие уровня в базе [7, 20], а, возможно, за два просмотра текущего узла i : при построении цепи от узла τ и при построении цепи от узла ρ , где $(\tau, \rho)^k$ — дуга, порождающая характеристический вектор $\delta^k(\tau, \rho)$. Каждый из просмотров вносит по одному слагаемому в итоговые суммы предыдущих формул (1.6.1), (1.6.2). Таким способом можно упростить алгоритм разрешения путей и сделать его одинаковым для каждого из узлов, избавившись от трех вариантов соотношения уровней узлов и хранения значений уровней в базе [7].

Аналогичным образом изменим одну или две (в зависимости от конфигурации сети $(I^k, U_L^k \cup (\tau, \rho)^k)$) компоненты характеристического вектора для дуг цикла. Далее воспользуемся алгоритмом решения СЛАУ специального вида, который подробно опишем ниже.

Рассмотрим на примере графа, представленного на рис. 1.3, вычисление компонент характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho) = \delta^1(2, 1)$, порожденного дугой $(\tau, \rho)^k = (2, 1)^1$ относительно множества дуг U_L^1 , представленного на рис. 1.3.

Обозначим через (I_C^k, U_C^k) граф, который составляют дуги невырожденного цикла, где I_C^k — множество узлов, U_C^k — множество дуг графа (I_C^k, U_C^k) . Для графа, представленного на рис. 1.3, сформируем соответствующие множества I_C^k и U_C^k :

$$I_C^1 = \{1, 3, 4\},$$

$$U_C^k = \{(1, 3)^1, (1, 4)^1, (3, 4)^1\}.$$

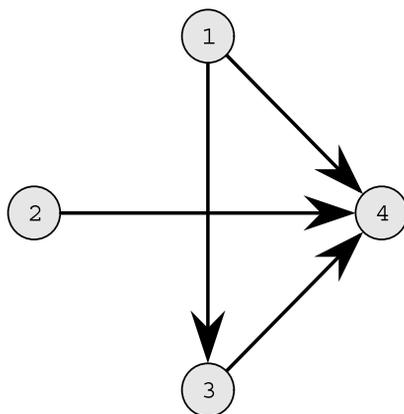


Рис. 1.3. Множество дуг U_L^1

Для краткости в компонентах характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$ не будем указывать дугу $(\tau, \rho)^k$, которая его порождает, если из контекста ясно, о каком векторе идет речь. Обозначим компоненты характеристического вектора $\delta^1(2, 1)$ следующим образом:

$$\delta^1(2, 1) = (\delta_{1,3}^1, \delta_{1,4}^1, \delta_{2,1}^1, \delta_{2,3}^1, \delta_{2,4}^1, \delta_{3,4}^1).$$

Одну единицу потока пропускаем в сети $(I^1, U_L^1 \cup (2,1)^1)$ по дуге $(2,1)^1$: $\delta_{2,1}^1 = 1$. Ненулевые компоненты характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho) = \delta^1(2,1)$, порожденного дугой $(\tau, \rho)^1 = (2,1)^1$, соответствуют дугам $(1,3)^1, (1,4)^1, (2,1)^1, (2,4)^1, (3,4)^1$ и вычисляются из системы:

$$\delta_{1,3}^1 + \delta_{1,4}^1 - \frac{1}{10}\delta_{2,1}^1 = 0,$$

$$\delta_{2,1}^1 + \delta_{2,4}^1 = 0,$$

$$\delta_{3,4}^1 - \frac{6}{10}\delta_{1,3}^1 = 0, \quad (1.6.3)$$

$$-\frac{9}{10}\delta_{1,4}^1 - \frac{1}{2}\delta_{2,4}^1 - \frac{8}{10}\delta_{3,4}^1 = 0,$$

$$\delta_{2,1}^1 = 1.$$

Приведем структуры данных для вычисления ненулевых компонент каждого характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$ за число операций $O(n)$ в худшем случае, где $n = |I^k|$. Для построения решения системы (1.6.3) с указанной оценкой числа операций для вычисления ненулевых компонент характеристического вектора $\delta^1(2,1)$ необходимо ввести следующую информацию:

- $t = \{2, 3, 4, 1\}$ — элементы списка $\{t[i], i \in I^k\}$ для компоненты связности U_L^1 . Список $\{t[i], i \in I^k\}$ определяет порядок решения уравнений системы (1.6.3);
- список $p = \{-3, 4, -4, -1\}$ определяет для каждого узла $i \in I^1$ значение $|p[i]|$, которое является отцом узла i в корневой структуре; знак "минус" определяет корень узла корневой структуры;
- направление дуги в корневой структуре для каждого узла $i \in I^1$ определяет список $d = \{-1, -1, -1, 1\}$: если узел i является корнем, то $d[i] = 0$; если дуга $(|p[i]|, i) \in U^1$, то $d[i] = 1$; если дуга $(i, |p[i]|) \in U^1$, то $d[i] = -1$.

Подробное описание элементов списков $\{t[i], i \in I^k\}$, $\{p[i], i \in I^k\}$ и $\{d[i], i \in I^k\}$ приведено в [16].

Для вычисления ненулевых компонент характеристического вектора $\delta^1(2,1)$, которые соответствуют дугам цикла, необходимо решить разреженную систему линейных уравнений (1.6.4):

$$\begin{aligned} \delta_{1,3}^1 + \delta_{1,4}^1 &= \frac{1}{10}, \\ \delta_{3,4}^1 - \frac{6}{10}\delta_{1,3}^1 &= 0, \\ -\frac{9}{10}\delta_{1,4}^1 - \frac{8}{10}\delta_{3,4}^1 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

Приведем линейный алгоритм вычисления компонент характеристического вектора, которые соответствуют дугам невырожденного цикла.

Выберем любую компоненту характеристического вектора $\delta^1(2,1)$, соответствующую некоторой дуге цикла например $\delta_{1,3}^1$. Положим $\delta_{1,3}^1$ равным любому значению, например $\delta_{1,3}^1 = 0$. Решаем уравнения системы (1.6.4) для каждого узла цикла в следующем порядке:

3, 4, 1.

Вычислим невязку ψ_0 , полученную в результате первого прохождения цикла:

$$\psi_0 = \frac{41}{90}.$$

Произведем аналогичные действия для начального значения $\delta_{1,3}^1 = 1$, которое не равно начальному значению компоненты $\delta_{1,3}^1$ при первом прохождении цикла, т. е. $\delta_{1,3}^1 \neq 0$. Решаем уравнения системы (1.6.4) для каждого узла цикла в следующем порядке:

3, 4, 1.

Вычислим невязку ψ_1 , полученную в результате второго прохождения цикла:

$$\psi_1 = \frac{83}{90}.$$

Заметим, что в результате первого и второго прохождения цикла не нужно сохранять значения вычисленных компонент характеристического вектора.

По формуле (1.1.8) подсчитаем истинное значение компоненты $\delta_{1,3}^1$ характеристического вектора $\delta^1(2,1)$, соответствующей выбранной дуге $(1,3)^1$ цикла:

$$\delta_{1,3}^1 = -\frac{41}{42}.$$

Выполняем третье прохождение цикла, сохраняя искомые значения компонент характеристического вектора $\delta^1(2,1)$, соответствующих дугам цикла, полученные в результате решения уравнений системы (1.6.4) для каждого узла цикла в том же порядке: 3, 4, 1.

В результате решения уравнения системы (1.6.4), которое соответствует узлу 3 цикла:

$$\delta_{3,4}^1 - \frac{6}{10}\delta_{1,3}^1 = 0,$$

вычислим истинное значение компоненты $\delta_{3,4}^1$ характеристического вектора $\delta^1(2,1)$:

$$\delta_{3,4}^1 = -\frac{41}{70}.$$

В результате решения уравнения системы (1.6.4), которое соответствует узлу 4 цикла:

$$-\frac{9}{10}\delta_{1,4}^1 - \frac{8}{10}\delta_{3,4}^1 = -\frac{1}{2},$$

вычислим истинное значение компоненты $\delta_{1,4}^1$ характеристического вектора $\delta^1(2,1)$:

$$\delta_{1,4}^1 = \frac{113}{105}.$$

В результате подстановки вычисленных значений компонент характеристического вектора $\delta^1(2,1)$, полученных после третьего прохождения цикла, в уравнение:

$$\delta_{1,3}^1 + \delta_{1,4}^1 = \frac{1}{10}$$

системы (1.6.4), которое соответствует узлу 1 цикла, получим тождество.

Итак, построен характеристический вектор $\delta^1(2,1)$, порожденный дугой $(\tau, \rho)^1 = (2,1)^1$:

$$\delta^1(2,1) = (\delta_{2,1}^1(2,1), \delta_{2,3}^1(2,1), \delta_{2,4}^1(2,1), \delta_{3,4}^1(2,1), \delta_{1,4}^1(2,1), \delta_{1,3}^1(2,1)),$$

где

$$\delta_{2,1}^1(2,1) \rightarrow 1, \delta_{2,3}^1(2,1) \rightarrow 0, \delta_{2,4}^1(2,1) \rightarrow -1,$$

$$\delta_{3,4}^1(2,1) \rightarrow -\frac{41}{70}, \delta_{1,4}^1(2,1) \rightarrow \frac{113}{105}, \delta_{1,3}^1(2,1) \rightarrow -\frac{41}{42}.$$

Так как вклады путей корневой структуры в уравнения для дуг цикла были изначально сохранены, то при их пересчете не потребовалось просматривать все смежные дуги. То есть количество просмотренных дуг не превышает количества просмотренных узлов. Итак, сложность алгоритма вычисления ненулевых компонент характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$ в наихудшем случае равна $O(|I^k|)$ для фиксированного $k \in K$.

Опора $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ обобщенной сети $G = (I, U)$ для разреженной системы (1.2.1) — это объединение $S_L^k = \bigcup_t S_L^{k,t}$ связных компонент $S_L^{k,t} = (I(U_L^{k,t}), U_L^{k,t})$, каждая компонента связности $S_L^{k,t} = (I(U_L^{k,t}), U_L^{k,t})$ содержит единственный невырожденный цикл [3, 5], $U_L^k = \bigcup_t U_L^{k,t}$ и $I^k = \bigcup_t I(U_L^{k,t})$. В результате добавления дуги $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$, где $k \in K$ фиксировано, к опоре U_L будет получена сеть, которая состоит из компонент связности, единственная из которых является бициклом $B_{\tau\rho}^k = U_L^k \cup (\tau, \rho)^k$. Каждая из остальных компонент связности имеет теоретико-графовые свойства опоры обобщенной мультисети $G = (I, U)$ для разреженной системы (1.2.1), которые описаны выше.

При использовании теоретико-графовых свойств опоры U_L и соответствующих структур данных в алгоритме поиска бицикла в сети ненулевые компоненты каждого характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$, порожденного дугой $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$ относительно опоры U_L^k , где $k \in K$ фиксировано, можно вычислить за число операций $O(n)$ в наихудшем случае, где n — число узлов бицикла $B_{\tau\rho}^k = U_L^k \cup (\tau, \rho)^k$.

Рассмотрим построение характеристического вектора $\delta^1(3,4)$, порожденного дугой $(3,4)^1$ относительно опоры U_L , представленной на рис. 1.2.

Для краткости в компонентах характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$ не будем указывать дугу, которая его порождает, поскольку из контекста ясно, о каком векторе идет речь. Компоненты характеристического вектора $\delta^1(3,4)$, где $\delta^1(3,4) = (\delta_{1,4}^1, \delta_{2,1}^1, \delta_{2,3}^1, \delta_{2,4}^1, \delta_{3,4}^1)$ удовлетворяют разреженной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \delta_{1,4}^1 - \delta_{2,1}^1 &= 0, \\ \delta_{2,1}^1 + \delta_{2,3}^1 + \delta_{2,4}^1 &= 0, \\ \delta_{3,4}^1 - \frac{9}{10}\delta_{2,3}^1 &= 0, \\ -\frac{3}{5}\delta_{1,4}^1 - \frac{3}{10}\delta_{2,4}^1 - \frac{3}{10}\delta_{3,4}^1 &= 0, \\ \delta_{3,4}^1 &= 1. \end{aligned} \tag{1.6.5}$$

Приведем структуры данных для вычисления ненулевых компонент каждого характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$ за число операций $O(n)$ в наихудшем случае, где $n = |I^k|$. Для построения решения системы (1.6.5) с указанной оценкой числа операций для вычисления ненулевых компонент характеристического вектора $\delta^1(3,4)$ необходимо ввести следующую информацию: $t = \{3, 1, 2, 4\}$ — элементы списка $\{t[i], i \in I^k\}$ для компоненты связности U_L^1 . Подробное описание элементов списка $\{t[i], i \in I^k\}$ представлено ниже. Список $\{t[i], i \in I^k\}$ определяет порядок решения уравнений системы (1.6.5); список $p = \{-2, -4, 2, -1\}$ определяет для каждого узла $i \in I^k$ значение $|p[i]|$, которое является отцом узла i в корневой структуре; знак минус определяет корень узла корневой структуры; список $d = \{1, -1, 1, 1\}$ определяет для каждого узла $i \in I^k$ направление дуги в корневой структуре: если узел i является корнем, то $d[i] = 0$; если дуга $(|p[i]|, i) \in U^k$, то $d[i] = 1$; если дуга $(i, |p[i]|) \in U^k$, то $d[i] = -1$.

Заметим, что если для каждого i элемент $p[i]$ списка $\{p[i], i \in I^k\}$ корневой структуры содержит информацию о родительской дуге (i, j) , которая соединяет узел i с узлом j — отцом узла i , то нет необходимости в хранении списка $\{d[i], i \in I^k\}$.

Формирование элементов списка $\{t[i], i \in I^k\}$ для произвольного корневого дерева коллекции с корнем в узле невырожденного цикла опоры U_L осуществляется следующим образом:

- для фиксированного $t = 1$, где t — номер компоненты связности U_L^{kt} , выполняем династический обход произвольного корневого дерева из коллекции корневых деревьев с корнем в узле единственного цикла компоненты связности U_L^{kt} ;
- удаляем из полученного списка корень рассматриваемого корневого дерева;
- инвертируем полученный список узлов;
- помещаем инвертированный список узлов (без корня) в формируемый итоговый список $\{t[i], i \in I^k\}$.

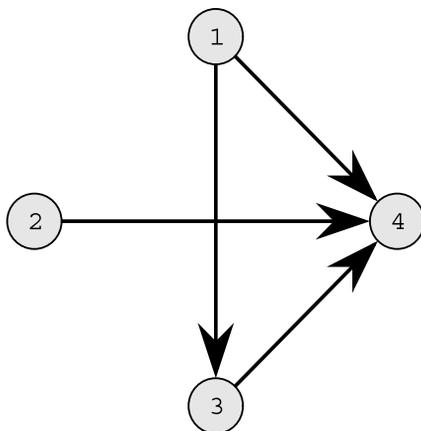
Аналогичные действия выполняем для каждого дерева коллекции корневых деревьев с корнями в узлах единственного невырожденного цикла компоненты связности U_L^{kt} . После обхода всех корневых деревьев коллекции помещаем полученные списки в произвольном порядке в итоговый формируемый список $\{t[i], i \in I^k\}$. Затем в список $\{t[i], i \in I^k\}$ помещаем узлы невырожденного цикла, который входит в состав компоненты связности U_L^{kt} в следующем порядке: $j, |p[j]|, |p[|p[j]|]|, \dots, v$, где j — произвольный узел невырожденного цикла, v — узел цикла, для которого выполняется условие: $|p[v]| = j$.

Далее выполняем описанные шаги формирования списка $\{t[i], i \in I^k\}$ для компонент связности U_L^{kt} , $t = 2, \dots, s$, где s — число компонент связности опоры U_L графа G . Сформированный список $\{t[i], i \in I^k\}$ определяет порядок решения уравнений системы для вычисления характеристического вектора или частного решения системы для фиксированного k .

Ненулевыми компонентами характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$, порожденного какой-либо дугой $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$, являются:

- компонента $\delta_{\tau\rho}^k$, соответствующая дуге $(\tau, \rho)^k$;
- компоненты, соответствующие дугам цепей, построенных от концов τ и ρ дуги $(\tau, \rho)^k$ в сети $S^k = (I^k, U_L^k \cup (\tau, \rho)^k)$ до узлов циклов;
- компоненты характеристического вектора, соответствующие дугам невырожденного цикла в сети $S^k = (I^k, U_L^k)$.

В табл. 1.6.1 представлена корневая структура, необходимая для хранения элементов множества U_L^1 (см. рис. 1.4), которая позволяет

Рис. 1.4. Множество дуг U_L^1

найти ненулевые компоненты характеристического вектора $\delta^1(2,1)$ за $O(n)$ операций в наихудшем случае, где $n = |I^1|$.

Таблица 1.6.1

Корневая структура для множества U_L^1

i	1	2	3	4
$p[i]$	-3	4	-4	-1
$d[i]$	-1	-1	-1	1
$t[i]$	2	3	4	1
$depth[i]$	0	1	0	0

Применим разработанные в секции 1.6 структуры данных для вычисления ненулевых компонент характеристического вектора $\delta^k(2,1)$. Корневая структура для множества U_L^1 приведена в табл. 1.6.1.

Напомним, что дуги, соответствующие ненулевым компонентам характеристического вектора $\delta^1(\tau, \rho)$, определены в теореме 1.6.1.

В листинге 1 приведена реализация в КТС *Wolfram Mathematica* вычисления ненулевых компонент характеристического вектора $\delta^1(2,1)$ за $O(n)$ операций в наихудшем случае, где $n = |I^1|$.

Листинг 1

```

system1 = {x11,3 + x11,4 - 1/10 x12,1 == 0,
x12,1 + x12,3 + x12,4 == 0,
x13,4 - 6/10 x11,3 - 9/10 x12,3 == 0,
-9/10 x11,4 - 1/2 x12,4 - 8/10 x13,4 == 0};

t = {2,3,4,1};
p = {-3,4, -4, -1};
d = {-1, -1, -1,1};

system1a = system1;
system1a[[1]] = system1a[[1]]/.{x12,1 -> 1};
system1a[[2]] = system1a[[2]]/.{x12,1 -> 1};
system1a[[2]] = system1a[[2]]/.{x12,3 -> 0};
system1a[[3]] = system1a[[3]]/.{x12,3 -> 0};

delta12,1 = {x12,1 -> 1, x12,3 -> 0};

For[i = 1, i <= 3, ++i,
{
If[d[[t[[i]]]] == 1,
delta = Solve[system1a[[t[[i]]]], x1Abs[p[[t[[i]]]], t[[i]]] [[1]],
delta = Solve[system1a[[t[[i]]]], x1[[i]], Abs[p[[t[[i]]]]] [[1]]];
delta12,1 = Join[delta12,1, delta];
If[i != 3,
system1a[[Abs[p[[t[[i]]]]]] = system1a[[Abs[p[[t[[i]]]]]]]/delta,
{
If[d[[t[[4]]]] == 1,
{
var0 = x1Abs[p[[t[[4]]]], t[[4]]]/.Solve[system1a[[t[[4]]]]/.
(delta/.{x1Abs[p[[t[[4]]]], t[[4]] -> 0}), x1Abs[p[[t[[4]]]], t[[4]]] [[1]];

```

$$\begin{aligned}
& \varphi_1 = \left(x1_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]]}/.\text{Solve}[\text{system1a}[[t[[4]]]]]/. \right. \\
& \left. (\delta/. \{x1_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]] \rightarrow 1\}), x1_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]]} [[1]] \right) - 1; \\
& \delta = \left\{ x1_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]] \rightarrow \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1}} \right\}; \\
& \left. \right\}, \\
& \left\{ \right. \\
& \varphi_0 = x1_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]]}/.\text{Solve}[\text{system1a}[[t[[4]]]]]/. \\
& \left. (\delta/. \{x1_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]] \rightarrow 0\}), x1_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]]} [[1]] \right); \\
& \varphi_1 = \left(x1_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]]}/.\text{Solve}[\text{system1a}[[t[[4]]]]]/. \right. \\
& \left. (\delta/. \{x1_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]] \rightarrow 1\}), x1_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]]} [[1]] \right) - 1; \\
& \delta = \left\{ x1_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]] \rightarrow \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1}} \right\}; \\
& \left. \right\}; \\
& \delta_{1,2,1} = \text{Join} [\delta_{1,2,1}/.\delta, \delta]; \\
& \left. \right\}; \\
& \left. \right\}; \\
& \delta_{1,2,1} \rightarrow \\
& \left\{ x_{1,2,1} \rightarrow 1, x_{1,2,3} \rightarrow 0, x_{1,2,4} \rightarrow -1, x_{1,3,4} \rightarrow -\frac{41}{70}, x_{1,1,4} \rightarrow \frac{113}{105}, x_{1,1,3} \rightarrow -\frac{41}{42} \right\}
\end{aligned}$$

1.7. Алгоритм построения общего решения

Теорема 1.7.1. *Общее решение системы (1.2.5) для фиксированного $k \in K$ может быть представлено в следующем виде:*

$$x_{ij}^k = \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} x_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho) + \left(\tilde{x}_{ij}^k - \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \tilde{x}_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho) \right), \quad (1.7.1)$$

$$(i, j)^k \in U_L^k; \quad x_{\tau\rho}^k \in \mathbf{R}, \quad (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k,$$

где $\tilde{x}^k = (\tilde{x}_{ij}^k, (i, j)^k \in U^k)$ – любое частное решение системы (1.2.5) для фиксированного $k \in K$; $x_{\tau\rho}^k$ – независимые переменные, соответствующие дугам $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$; U_L – опора обобщенной мультисети $G = (I, U)$ для разреженной системы (1.2.5).

Доказательство. Обозначим через $x^k = (x_{ij}^k, (i, j)^k \in U^k)$ общее решение системы (1.2.5), и пусть $\tilde{x}^k = (\tilde{x}_{ij}^k, (i, j)^k \in U^k)$ – некоторое частное решение системы (1.2.5). Поскольку по теореме 1.5.1 множество $\{\delta^k(\tau, \rho), (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k\}$ характеристических векторов составляет базис пространства решений однородной системы, порожденной

системой (1.2.5), то представим общее решение x^k в следующей векторной форме:

$$x^k = \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \alpha_{\tau\rho}^k \delta^k(\tau, \rho) + \tilde{x}^k \quad (1.7.2)$$

как сумму общего решения однородной системы, порожденной системой (1.2.5) и некоторого частного решения неоднородной системы (1.2.5), $\alpha_{\tau\rho}^k \in \mathbf{R}$ — коэффициенты линейной комбинации характеристических векторов в (1.7.2).

Представим (1.7.2) в компонентной форме:

$$x_{ij}^k = \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \alpha_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho) + \tilde{x}_{ij}^k, \quad (i, j)^k \in U_L^k; \quad (1.7.3)$$

$$x_{\tau\rho}^k = \alpha_{\tau\rho}^k + \tilde{x}_{\tau\rho}^k, \quad (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k. \quad (1.7.4)$$

Из уравнений (1.7.4) находим

$$\alpha_{\tau\rho}^k = x_{\tau\rho}^k - \tilde{x}_{\tau\rho}^k, \quad (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$$

и подставляем в (1.7.3). Итак, получили выражение (1.7.1) для общего решения системы (1.2.5). \square

Замечание 1.7.1. На практике при построении частного решения $\tilde{x}^k = (\tilde{x}_{ij}^k, (i, j)^k \in U^k)$ системы (1.2.5) будем полагать $\tilde{x}_{\tau\rho}^k = 0$, для дуг $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$, и тогда система (1.2.5) для нахождения частного решения \tilde{x}^k представима в виде

$$\sum_{j \in I_i^+(U_L^k)} \tilde{x}_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U_L^k)} u_{ji}^k \tilde{x}_{ji}^k = a_i^k, \quad i \in I^k.$$

В этом случае формула (1.7.1) имеет вид

$$x_{ij}^k = \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \alpha_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho) + \tilde{x}_{ij}^k, (i, j)^k \in U_L^k, \quad (1.7.5)$$

$$x_{\tau\rho}^k \in \mathbf{R}, \quad (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k.$$

В дальнейшем будем использовать формулу (1.7.5).

1.8. Алгоритм построения частного решения

Рассмотрим эффективный алгоритм построения частного решения системы вида (1.2.1). На примере корневой структуры, необходимой для хранения элементов множества U_L^2 (см. рис. 1.5) и представленной в табл. 1.8.1, продемонстрируем алгоритм, который позволяет построить частное решение системы вида (1.2.1) для каждого k за $O(n)$ операций в худшем случае, где $n = |I^k|$. Итак, рассмотрим пример вычисления компонент частного решения, которые соответствуют дугам множества U_L^2 (см. рис. 1.5).

Таблица 1.8.1

Корневая структура для множества U_L^2

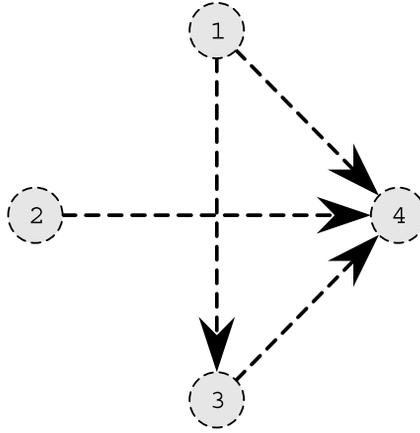
i	1	2	3	4
$p[i]$	-3	4	-4	-1
$d[i]$	-1	-1	-1	1
$t[i]$	2	3	4	1
$depth[i]$	0	1	0	0

В листинге 2 приведен код в системе *Wolfram Mathematica* для вычисления опорных компонент вектора \tilde{x}^k — частного решения разреженной системы (1.2.5) для фиксированного $k \in K$ за $O(n)$ операций в худшем случае, $n = |I^k|$.

Листинг 2

```
system2 = {x21,3 + x21,4 -  $\frac{1}{10}$ x22,1 ==  $\frac{92}{10}$ ,
x22,1 + x22,3 + x22,4 == 17,
x23,4 -  $\frac{6}{10}$ x21,3 -  $\frac{9}{10}$ x22,3 == - $\frac{103}{10}$ ,
- $\frac{5}{10}$ x21,4 -  $\frac{3}{10}$ x22,4 -  $\frac{3}{10}$ x23,4 == - $\frac{21}{10}$ };

t = {2,3,4,1};
p = {-3,4,-4,-1};
```

Рис. 1.5. Множество дуг U_L^2

$$d = \{-1, -1, -1, 1\};$$

$$\text{system2}[[1]] = \text{system2}[[1]] / \{x_{2,1} \rightarrow 0\};$$

$$\text{system2}[[2]] = \text{system2}[[2]] / \{x_{2,1} \rightarrow 0\};$$

$$\text{system2}[[2]] = \text{system2}[[2]] / \{x_{2,3} \rightarrow 0\};$$

$$\text{system2}[[3]] = \text{system2}[[3]] / \{x_{2,3} \rightarrow 0\};$$

$$\overline{\delta 2} = \{x_{2,1} \rightarrow 0, x_{2,3} \rightarrow 0\};$$

For[$i = 1, i \leq 3, ++i$,

{

If[$d[[t[[i]]]] == 1$,

$\delta = \text{Solve}[\text{system2}[[t[[i]]], x_{\text{Abs}[p[[t[[i]]]]], t[[i]]}] [[1]]$,

$\delta = \text{Solve}[\text{system2}[[t[[i]]], x_{t[[i]], \text{Abs}[p[[t[[i]]]]}] [[1]]$];

$\overline{\delta 2} = \text{Join}[\overline{\delta 2}, \delta]$;

If[$i \neq 3$,

$\text{system2}[[\text{Abs}[p[[t[[i]]]]]] = \text{system2}[[\text{Abs}[p[[t[[i]]]]]]] / \delta$,

{

If[$d[[t[[4]]]] == 1$,

{

$$\begin{aligned}
& \varphi_0 = x2_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]]}/.\text{Solve}[\text{system2}[[t[[4]]]]]/. \\
& (\delta/. \{x2_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]] \rightarrow 0\}), x2_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]]} \} [[1]]; \\
& \varphi_1 = (x2_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]]}/.\text{Solve}[\text{system2}[[t[[4]]]]]/. \\
& (\delta/. \{x2_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]] \rightarrow 1\}), x2_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]]} \} [[1]] - 1; \\
& \delta = \{x2_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]] \rightarrow \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1}}\}; \\
& \}; \\
& \{ \\
& \varphi_0 = x2_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]]}/.\text{Solve}[\text{system2}[[t[[4]]]]]/. \\
& (\delta/. \{x2_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]] \rightarrow 0\}), x2_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]]} \} [[1]]; \\
& \varphi_1 = (x2_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]]}/.\text{Solve}[\text{system2}[[t[[4]]]]]/. \\
& (\delta/. \{x2_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]] \rightarrow 1\}), x2_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]]} \} [[1]] - 1; \\
& \delta = \{x2_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]] \rightarrow \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1}}\}; \\
& \}; \\
& \delta_2 = \text{Join} [\overline{\delta_2}/.\delta, \delta]; \\
& \}; \\
& \}; \\
& \overline{\delta_2} \rightarrow \\
& \left\{ x2_{2,1} \rightarrow 0, x2_{2,3} \rightarrow 0, x2_{2,4} \rightarrow 17, x2_{3,4} \rightarrow -\frac{59}{32}, x2_{1,4} \rightarrow -\frac{783}{160}, x2_{1,3} \rightarrow \frac{451}{32} \right\}
\end{aligned}$$

1.9. Пример построения общего решения

Рассмотрим пример (1.9.1) – (1.9.5) построения общего решения системы вида (1.2.1) – (1.2.3) для обобщенной мультисети $G = (I, U)$, где

$$I = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$U = \{(1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,4)\}.$$

Пусть $K = \{1, 2, 3\}$ – множество типов потоков в мультисети G . В состав множества мультидуг \tilde{U}^1 мультисети G , по которым имеются потоки первого типа, входят следующие мультидуги:

$$\tilde{U}^1 = \{(1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,4)\}.$$

Множества мультидуг \tilde{U}^2, \tilde{U}^3 , по которым имеются потоки второго и третьего типов, совпадают с множеством \tilde{U}^1 :

$$\tilde{U}^2 = \tilde{U}^1, \quad \tilde{U}^3 = \tilde{U}^1.$$

Обобщенная мультисеть $G = (I, U)$ представлена на рис. 1.6 в виде объединения обобщенных сетей $G^k = (I^k, U^k)$, $k \in K = \{1, 2, 3\}$.

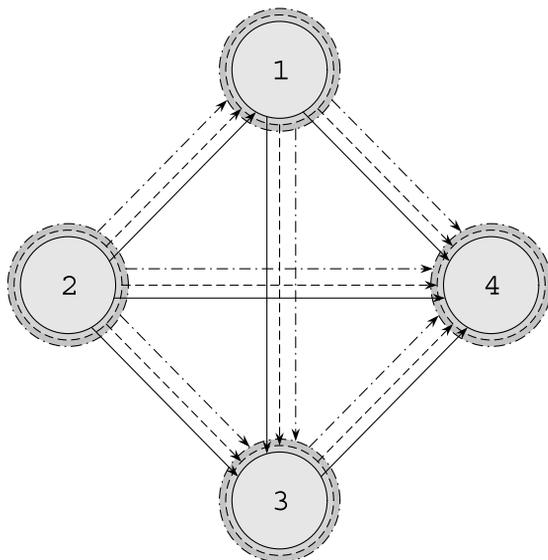


Рис. 1.6. Обобщенная мультисеть $G = (I, U)$, представленная в виде объединения $|K| = 3$ обобщенных сетей $G^k = (I^k, U^k)$, $k \in K = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned}
 x_{13}^1 + x_{14}^1 - \frac{1}{10}x_{21}^1 &= \frac{31}{5} \\
 x_{21}^1 + x_{23}^1 + x_{24}^1 &= 20 \\
 x_{34}^1 - \frac{3}{5}x_{13}^1 - \frac{9}{10}x_{23}^1 &= -\frac{43}{10} \\
 -\frac{9}{10}x_{14}^1 - \frac{1}{2}x_{24}^1 - \frac{4}{5}x_{34}^1 &= -10
 \end{aligned}
 \tag{1.9.1}$$

$$x_{13}^2 + x_{14}^2 - \frac{1}{10}x_{21}^2 = \frac{46}{5}$$

$$x_{21}^2 + x_{23}^2 + x_{24}^2 = 17$$

$$x_{34}^2 - \frac{3}{5}x_{13}^2 - \frac{9}{10}x_{23}^2 = -\frac{103}{10}$$

$$-\frac{1}{2}x_{14}^2 - \frac{3}{10}x_{24}^2 - \frac{3}{10}x_{34}^2 = -\frac{21}{10}$$

(1.9.2)

$$x_{13}^3 + x_{14}^3 - \frac{1}{2}x_{21}^3 = 12$$

$$x_{21}^3 + x_{23}^3 + x_{24}^3 = 20$$

$$x_{34}^3 - \frac{4}{5}x_{13}^3 - \frac{1}{5}x_{23}^3 = -\frac{8}{5}$$

$$-\frac{1}{2}x_{14}^3 - \frac{2}{5}x_{24}^3 - \frac{3}{10}x_{34}^3 = -\frac{38}{5}$$

(1.9.3)

$$\begin{aligned} &4x_{13}^1 + 7x_{13}^2 + x_{13}^3 + 6x_{14}^3 + 5x_{21}^1 + 5x_{21}^2 + 3x_{21}^3 + \\ &+ 6x_{23}^1 + 7x_{23}^2 + 2x_{23}^3 + 8x_{24}^1 + 7x_{24}^2 + x_{24}^3 + 5x_{34}^1 + \\ &+ 7x_{34}^2 + 4x_{34}^3 = 439 \end{aligned}$$

(1.9.4)

$$\begin{aligned} &7x_{13}^1 + 9x_{13}^2 + 8x_{13}^3 + 7x_{14}^1 + 9x_{14}^2 + 8x_{14}^3 + \\ &+ 9x_{21}^1 + 5x_{21}^2 + 9x_{21}^3 + 3x_{23}^1 + x_{23}^2 + 9x_{23}^3 + 6x_{24}^1 + \\ &+ 4x_{24}^2 + 9x_{34}^1 + 5x_{34}^2 + 3x_{34}^3 = 644 \end{aligned}$$

$$x_{21}^1 + x_{21}^2 + x_{21}^3 = 28$$

(1.9.5)

Выберем опору U_L обобщенной мультисети $G = (I, U)$ для разреженной системы (1.9.1) – (1.9.3). Пусть опора $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ где $K = \{1, 2, 3\}$ состоит из одной компоненты связности для каждого типа потока:

$$U_L^1 = \{(1,3)^1, (1,4)^1, (2,4)^1, (3,4)^1\},$$

$$U_L^2 = \{(1,3)^2, (1,4)^2, (2,4)^2, (3,4)^2\},$$

$$U_L^3 = \{(1,3)^3, (1,4)^3, (2,4)^3, (3,4)^3\}.$$

Опора $U_L = \{U_L^k, k \in K = \{1, 2, 3\}\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (1.9.1) – (1.9.3) представлена на рис. 1.7.

Построение общего решения разреженной недоопределенной системы (1.9.1) – (1.9.5) основано на применении теории декомпозиции системы вида (1.2.1) – (1.2.3) и состоит из следующих основных шагов:

- Выбрать структуры данных для представления опоры (рис. 1.7) $U_L = \{U_L^k, k \in K = \{1, 2, 3\}\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (1.9.1) – (1.9.3). Построить систему характеристических векторов относительно опоры обобщенной мультисети $G = (I, U)$ для разреженной системы (1.9.1) – (1.9.3), где $U_L = \{U_L^k, k \in K = \{1, 2, 3\}\}$. Другими словами, построить базис пространства решений однородной системы, порожденной разреженной системой линейных алгебраических уравнений (1.9.1) – (1.9.3). Число операций построения каждого характеристического вектора $(\delta_{ij}^k(\tau, \rho), (i, j)^k \in U^k)$ в наихудшем случае пропорционально $|U^k|$, где $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k, k \in K, K = \{1, 2, 3\}$.
- Построить частное решение системы блочно-диагонального вида (1.9.1) – (1.9.3) в соответствии с правилами замечания 1.7.1. Число операций построения частного решения системы (1.9.1) для каждого блока размера $|I^k| \times |U^k|$ обобщенной сети $G^k = (I^k, U^k)$ в наихудшем случае равно $O(|U^k|), k \in K = \{1, 2, 3\}$.
- Сформировать матрицу детерминантов D и вектор β правой части системы для вычисления неизвестных, которые соответствуют множеству U_B бициклических дуг [16]. Применяя принципы

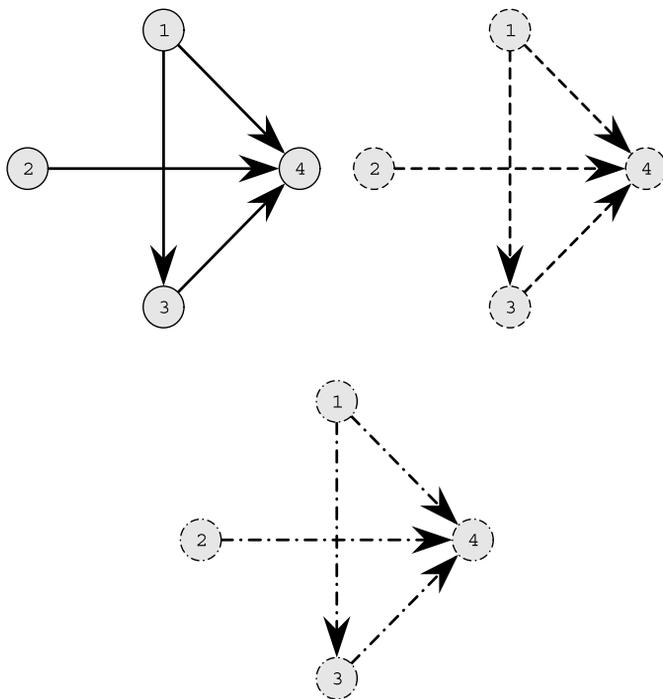


Рис. 1.7. Опора $U_L = \{U_L^k, k \in K = \{1, 2, 3\}\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (1.9.1)–(1.9.3)

декомпозиции для системы (1.9.1)–(1.9.5), вычислить неизвестные $x_B = (x_{2,1}^1, x_{2,1}^2, x_{2,1}^3)$, соответствующие множеству U_B бициклических дуг, где $U_B = \bigcup_{k=1}^3 U_B^k$, $U_B^1 = \{(2,1)^1\}$, $U_B^2 = \{(2,1)^2\}$, $U_B^3 = \{(2,1)^3\}$.

- Используя теоретико-графовые свойства опоры $U_L = \bigcup_{k=1}^3 U_L^k$ обобщенной мультисети $G = (I, U)$ для разреженной системы (1.9.1)–(1.9.3), вычислить неизвестные системы (1.9.1)–(1.9.5), соответствующие дугам опоры $U_L = \bigcup_{k=1}^3 U_L^k$, где

$$U_L^1 = \{(1,3)^1, (1,4)^1, (2,4)^1, (3,4)^1\},$$

$$U_L^2 = \{(1,3)^2, (1,4)^2, (2,4)^2, (3,4)^2\},$$

$$U_L^3 = \{(1,3)^3, (1,4)^3, (2,4)^3, (3,4)^3\},$$

- Выполнить контроль полученного рационального решения разреженной недоопределенной системы линейных алгебраических уравнений (1.9.1) – (1.9.5) с использованием функции *Simplify* КТС *Wolfram Mathematica*.

Приведем структуры данных для представления опоры (рис. 1.7) $U_L = \{U_L^k, k \in K = \{1, 2, 3\}\}$ обобщенной мультисети $G = (I, U)$ для разреженной системы (1.9.1) – (1.9.3).

- Список $t = \{2, 3, 4, 1\}$ содержит последовательность узлов из множества I^1 компоненты связности (I^1, U_L^1) , которая определяет порядок решения уравнений системы (1.9.1).
- Список $p = \{-3, 4, -4, -1\}$ определяет для каждого узла $i \in I^1$ значение $|p[i]|$, которое является отцом узла i в корневой структуре (знак "минус" определяет корень узла корневой структуры) [16, 20].
- Список $d = \{-1, -1, -1, 1\}$ определяет направление дуги в корневой структуре для каждого узла $i, i \in I^1$: если узел i является корнем, то $d[i] = 0$; если дуга $(|p[i]|, i) \in U^1$, то $d[i] = 1$; если дуга $(i, |p[i]|) \in U^1$, то $d[i] = -1$.

Для компонент связности (I^2, U_L^2) и (I^3, U_L^3) можно использовать структуры данных, приведенные для компоненты связности (I^1, U_L^1) .

Система характеристических векторов (базис пространства решений) однородной системы, порожденной системой линейных алгебраических уравнений (1.9.1) – (1.9.3), состоит из векторов $\delta^1(2,1)$, $\delta^1(2,3)$, $\delta^2(2,1)$, $\delta^2(2,3)$, $\delta^3(2,1)$, $\delta^3(2,3)$.

Число операций построения каждого характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^k(\tau, \rho), (i, j)^k \in U^k)$ равно $O(m)$ в наихудшем случае, где $m = |U^k|$, $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$, $k \in K$, $K = \{1, 2, 3\}$.

$$\delta^1(2,1) = (\delta_{2,1}^1(2,1) \rightarrow 1, \delta_{2,3}^1(2,1) \rightarrow 0, \delta_{2,4}^1(2,1) \rightarrow -1, \\ \delta_{1,3}^1(2,1) \rightarrow -\frac{41}{42}, \delta_{1,4}^1(2,1) \rightarrow \frac{113}{105}, \delta_{3,4}^1(2,1) \rightarrow -\frac{41}{70});$$

$$\delta^1(2,3) = (\delta_{2,1}^1(2,3) \rightarrow 0, \delta_{2,3}^1(2,3) \rightarrow 1, \delta_{2,4}^1(2,3) \rightarrow -1, \\ \delta_{1,3}^1(2,3) \rightarrow \frac{11}{21}, \delta_{1,4}^1(2,3) \rightarrow -\frac{11}{21}, \delta_{3,4}^1(2,3) \rightarrow \frac{17}{14});$$

$$\delta^2(2,1) = (\delta_{2,1}^2(2,1) \rightarrow 1, \delta_{2,3}^2(2,1) \rightarrow 0, \delta_{2,4}^2(2,1) \rightarrow -1, \\ \delta_{1,3}^2(2,1) \rightarrow -\frac{25}{32}, \delta_{1,4}^2(2,1) \rightarrow \frac{141}{160}, \delta_{3,4}^2(2,1) \rightarrow -\frac{15}{32});$$

$$\delta^2(2,3) = (\delta_{2,1}^2(2,3) \rightarrow 0, \delta_{2,3}^2(2,3) \rightarrow 1, \delta_{2,4}^2(2,3) \rightarrow -1, \\ \delta_{1,3}^2(2,3) \rightarrow -\frac{3}{32}, \delta_{1,4}^2(2,3) \rightarrow \frac{3}{32}, \delta_{3,4}^2(2,3) \rightarrow \frac{27}{32});$$

$$\delta^3(2,1) = (\delta_{2,1}^3(2,1) \rightarrow 1, \delta_{2,3}^3(2,1) \rightarrow 0, \delta_{2,4}^3(2,1) \rightarrow -1, \\ \delta_{1,3}^3(2,1) \rightarrow -\frac{15}{26}, \delta_{1,4}^3(2,1) \rightarrow \frac{14}{13}, \delta_{3,4}^3(2,1) \rightarrow -\frac{6}{13});$$

$$\delta^3(2,3) = (\delta_{2,1}^3(2,3) \rightarrow 0, \delta_{2,3}^3(2,3) \rightarrow 1, \delta_{2,4}^3(2,3) \rightarrow -1, \\ \delta_{1,3}^3(2,3) \rightarrow -\frac{17}{13}, \delta_{1,4}^3(2,3) \rightarrow \frac{17}{13}, \delta_{3,4}^3(2,3) \rightarrow -\frac{11}{13}).$$

Частное решение \tilde{x} разреженной системы линейных алгебраических уравнений (1.9.1) – (1.9.3) имеет вид:

$$\tilde{x}^1 = (\tilde{x}_{2,1}^1 \rightarrow 0, \tilde{x}_{2,3}^1 \rightarrow 0, \tilde{x}_{2,4}^1 \rightarrow 20, \tilde{x}_{1,3}^1 \rightarrow \frac{107}{21}, \\ \tilde{x}_{1,4}^1 \rightarrow \frac{116}{105}, \tilde{x}_{3,4}^1 \rightarrow -\frac{87}{70});$$

$$\begin{aligned}\bar{x}^2 &= (\bar{x}_{2,1}^2 \rightarrow 0, \bar{x}_{2,3}^2 \rightarrow 0, \bar{x}_{2,4}^2 \rightarrow 17, \bar{x}_{1,3}^2 \rightarrow \frac{451}{32}, \\ &\bar{x}_{1,4}^2 \rightarrow -\frac{783}{160}, \bar{x}_{3,4}^2 \rightarrow -\frac{59}{32}); \\ \bar{x}^3 &= (\bar{x}_{2,1}^3 \rightarrow 0, \bar{x}_{2,3}^3 \rightarrow 0, \bar{x}_{2,4}^3 \rightarrow 20, \bar{x}_{1,3}^3 \rightarrow \frac{296}{13}, \\ &\bar{x}_{1,4}^3 \rightarrow -\frac{140}{13}, \bar{x}_{3,4}^3 \rightarrow \frac{216}{13}).\end{aligned}$$

Вычислим компоненты вектора $x_B = (x_{2,1}^1, x_{2,1}^2, x_{2,1}^3)^T$ — неизвестные системы (1.9.1) – (1.9.5), которые соответствуют множеству U_B бициклических дуг, где

$$U_B = \bigcup_{k=1}^3 U_B^k, U_B^1 = \{(2,1)^1\}, U_B^2 = \{(2,1)^2\}, U_B^3 = \{(2,1)^3\}.$$

Для вычисления неизвестных, которые соответствуют множеству U_B бициклических дуг, сформируем матрицу детерминантов D и вектор β правой части системы (1.9.6).

Итак, матрица детерминантов D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{59}{6} & -\frac{43}{4} & \frac{157}{26} \\ -\frac{11}{7} & -\frac{71}{160} & \frac{151}{13} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сформируем вектор β — правую часть системы (1.9.6).

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2413}{156} - \frac{37}{6}y_{2,3}^1 - \frac{21}{4}y_{2,3}^2 - \frac{54}{13}y_{2,3}^3 \\ \frac{2975457}{14560} - \frac{111}{14}y_{2,3}^1 - \frac{39}{32}y_{2,3}^2 - \frac{84}{13}y_{2,3}^3 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

Неизвестные $x_B = (x_{2,1}^1, x_{2,1}^2, x_{2,1}^3)^T$ системы (1.9.1) – (1.9.5), соответствующие множеству U_B бициклических дуг

$$U_B = \bigcup_{k=1}^3 U_B^k = \{(2,1)^1, (2,1)^2, (2,1)^3\},$$

удовлетворяют системе линейных уравнений (1.9.6).

$$\begin{pmatrix} -\frac{59}{6} & -\frac{43}{4} & \frac{157}{26} \\ -\frac{11}{7} & -\frac{71}{160} & \frac{151}{13} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2,1}^1 \\ x_{2,1}^2 \\ x_{2,1}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \quad (1.9.6)$$

Окончательно общее решение разреженной недоопределенной системы (1.9.1) – (1.9.5) относительно опоры $U_L^k \cup U_B^k, k \in K = \{1, 2, 3\}$ обобщенной мультисети $G = (I, U)$ имеет вид

$$x_{2,3}^1 = y_{2,3}^1, \quad x_{2,3}^2 = y_{2,3}^2, \quad x_{2,3}^3 = y_{2,3}^3,$$

$$x_{2,1}^1 = \frac{572277 + 190069y_{2,3}^1 - 138642y_{2,3}^2 + 188916y_{2,3}^3}{97022},$$

$$x_{2,1}^2 = \frac{4680311 - 1944720y_{2,3}^1 + 2179065y_{2,3}^2 - 2087040y_{2,3}^3}{1309797},$$

$$x_{2,1}^3 = \frac{48536531 - 1242423y_{2,3}^1 - 614796y_{2,3}^2 - 926652y_{2,3}^3}{2619594},$$

$$x_{1,3}^1 = \frac{-385807 - 808335y_{2,3}^1 + 812046y_{2,3}^2 - 1106508y_{2,3}^3}{582132},$$

$$x_{1,4}^1 = \frac{10845979 + 2305941y_{2,3}^1 - 2238078y_{2,3}^2 + 3049644y_{2,3}^3}{1455330},$$

$$x_{2,4}^1 = \frac{1368163 - 287091y_{2,3}^1 + 138642y_{2,3}^2 - 188916y_{2,3}^3}{97022},$$

$$x_{3,4}^1 = \frac{3(-1519251 + 21621y_{2,3}^1 + 270682y_{2,3}^2 - 368836y_{2,3}^3)}{970220},$$

$$x_{1,3}^2 = \frac{29606917 + 3038625y_{2,3}^1 - 3650376y_{2,3}^2 + 3261000y_{2,3}^3}{2619594},$$

$$x_{1,4}^2 = \frac{-1142523y_{2,3}^1 + 1362063y_{2,3}^2 - 2(761765 + 613068y_{2,3}^3)}{873198},$$

$$x_{2,4}^2 = \frac{2(8793119 + 972360y_{2,3}^1 - 1744431y_{2,3}^2 + 1043520y_{2,3}^3)}{1309797},$$

$$x_{3,4}^2 = \frac{-3072556 + 607725y_{2,3}^1 + 55803y_{2,3}^2 + 652200y_{2,3}^3}{873198},$$

$$x_{1,3}^3 = \frac{21096197 + 477855y_{2,3}^1 + 236460y_{2,3}^2 - 1927344y_{2,3}^3}{1746396},$$

$$x_{1,4}^3 = \frac{12029549 - 668997y_{2,3}^1 - 331044y_{2,3}^2 + 1213845y_{2,3}^3}{1309797},$$

$$x_{2,4}^3 = \frac{3855349 + 1242423y_{2,3}^1 + 614796y_{2,3}^2 - 1692942y_{2,3}^3}{2619594},$$

$$x_{3,4}^3 = \frac{3520681 + 95571y_{2,3}^1 + 47292y_{2,3}^2 - 298149y_{2,3}^3}{436599}.$$

1.10. Реализация в *Wolfram Mathematica*

В секции 1.9 рассмотрен пример построения общего решения разреженной недоопределенной системы линейных алгебраических уравнений (1.9.1) – (1.9.5). Обобщенная мультисеть $G = (I, U)$ представлена на рис. 1.6 в виде объединения обобщенных сетей $G^k = (I^k, U^k)$, где $k \in K, K = \{1, 2, 3\}$. Опора $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ обобщенной мультисети $G = (I, U)$ для разреженной системы (1.9.1) – (1.9.3) изображена на рис. 1.7. В состав множества U_B бициклических дуг включены дуги:

$$U_B = \bigcup_{k=1}^3 U_B^k, U_B^1 = \{(2,1)^1\}, U_B^2 = \{(2,1)^2\}, U_B^3 = \{(2,1)^3\}.$$

В приведенном в листинге 3 коде представлена реализация построения общего решения разреженной недоопределенной системы линейных алгебраических уравнений (1.9.1) – (1.9.5) в системе *Wolfram Mathematica* относительно опоры $U_L \cup U_B$ обобщенной мультисети $G = (I, U)$. Вычисления выполнены в рациональной арифметике.

Листинг 3

$$\begin{aligned} \text{system} &= \left\{ \begin{aligned} x1_{1,3} + x1_{1,4} - \frac{1}{10}x1_{2,1} &== \frac{62}{10}, \\ x1_{2,1} + x1_{2,3} + x1_{2,4} &== 20, \\ x1_{3,4} - \frac{6}{10}x1_{1,3} - \frac{9}{10}x1_{2,3} &== -\frac{43}{10}, \\ -\frac{9}{10}x1_{1,4} - \frac{1}{2}x1_{2,4} - \frac{8}{10}x1_{3,4} &== -10, \\ \\ x2_{1,3} + x2_{1,4} - \frac{1}{10}x2_{2,1} &== \frac{92}{10}, \\ x2_{2,1} + x2_{2,3} + x2_{2,4} &== 17, \\ x2_{3,4} - \frac{6}{10}x2_{1,3} - \frac{9}{10}x2_{2,3} &== -\frac{103}{10}, \\ -\frac{5}{10}x2_{1,4} - \frac{3}{10}x2_{2,4} - \frac{3}{10}x2_{3,4} &== -\frac{21}{10}, \\ \\ x3_{1,3} + x3_{1,4} - \frac{5}{10}x3_{2,1} &== 12, \\ x3_{2,1} + x3_{2,3} + x3_{2,4} &== 20, \\ x3_{3,4} - \frac{8}{10}x3_{1,3} - \frac{2}{10}x3_{2,3} &== -\frac{16}{10}, \\ -\frac{5}{10}x3_{1,4} - \frac{4}{10}x3_{2,4} - \frac{3}{10}x3_{3,4} &== -\frac{76}{10}, \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$4x_{1,3} + 7x_{2,3} + x_{3,3} + 6x_{3,4} + 5x_{1,2,1} + 5x_{2,2,1} + 3x_{3,2,1} + 6x_{1,2,3} + 7x_{2,2,3} + 2x_{3,2,3} + 8x_{1,2,4} + 7x_{2,2,4} + x_{3,2,4} + 5x_{1,3,4} + 7x_{2,3,4} + 4x_{3,3,4} == 439,$$

$$7x_{1,3} + 9x_{2,3} + 8x_{3,3} + 7x_{1,4} + 9x_{2,4} + 8x_{3,4} + 9x_{1,2,1} + 5x_{2,2,1} + 9x_{3,2,1} + 3x_{1,2,3} + x_{2,2,3} + 9x_{3,2,3} + 6x_{1,2,4} + 4x_{2,2,4} + 9x_{1,3,4} + 5x_{2,3,4} + 3x_{3,3,4} == 644,$$

$$\begin{aligned} & x_{1,2,1} + x_{2,2,1} + x_{3,2,1} == 28; \\ & \text{system1} = \left\{ x_{1,1,3} + x_{1,1,4} - \frac{1}{10}x_{1,2,1} == 0, \right. \\ & x_{1,2,1} + x_{1,2,3} + x_{1,2,4} == 0, \\ & x_{1,3,4} - \frac{6}{10}x_{1,1,3} - \frac{9}{10}x_{1,2,3} == 0, \\ & \left. -\frac{9}{10}x_{1,1,4} - \frac{1}{2}x_{1,2,4} - \frac{8}{10}x_{1,3,4} == 0 \right\}; \end{aligned}$$

$$t = \{2,3,4,1\};$$

$$p = \{-3,4, -4, -1\};$$

$$d = \{-1, -1, -1,1\};$$

$$\text{system1a} = \text{system1};$$

$$\text{system1a}[[1]] = \text{system1a}[[1]] /. \{x_{1,2,1} \rightarrow 1\};$$

$$\text{system1a}[[2]] = \text{system1a}[[2]] /. \{x_{1,2,1} \rightarrow 1\};$$

$$\text{system1a}[[2]] = \text{system1a}[[2]] /. \{x_{1,2,3} \rightarrow 0\};$$

$$\text{system1a}[[3]] = \text{system1a}[[3]] /. \{x_{1,2,3} \rightarrow 0\};$$

$$\delta_{1,2,1} = \{x_{1,2,1} \rightarrow 1, x_{1,2,3} \rightarrow 0\};$$

$$\text{For}[i = 1, i \leq 3, ++i,$$

$$\{$$

$$\text{If}[d[[t[[i]]]] == 1,$$

$$\delta = \text{Solve}[\text{system1a}[[t[[i]]]], x_{1_{\text{Abs}[p[[t[[i]]]]], t[[i]]}] [[1]],$$

$$\delta = \text{Solve}[\text{system1a}[[t[[i]]]], x_{1_{t[[i]], \text{Abs}[p[[t[[i]]]]}] [[1]]];$$

$$\delta_{1,2,1} = \text{Join}[\delta_{1,2,1}, \delta];$$

$$\text{If}[i \neq 3,$$

$$\text{system1a}[[\text{Abs}[p[[t[[i]]]]]]] = \text{system1a}[[\text{Abs}[p[[t[[i]]]]]]] / \delta,$$

$$\{$$

```

If[d[[t[[4]]]] == 1,
{
 $\varphi_0 = \mathbf{x1}_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]} / \text{.Solve}[\text{system1a}[[t[[4]]]] /$ 
 $(\delta / \{ \mathbf{x1}_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]} \rightarrow 0 \}), \mathbf{x1}_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]} \} \} \{ [1] \};$ 
 $\varphi_1 = (\mathbf{x1}_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]} / \text{.Solve}[\text{system1a}[[t[[4]]]] /$ 
 $(\delta / \{ \mathbf{x1}_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]} \rightarrow 1 \}), \mathbf{x1}_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]} \} \{ [1] \}) - 1;$ 
 $\delta = \left\{ \mathbf{x1}_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]} \rightarrow \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1} \right\};$ 
},
{
 $\varphi_0 = \mathbf{x1}_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]} / \text{.Solve}[\text{system1a}[[t[[4]]]] /$ 
 $(\delta / \{ \mathbf{x1}_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]} \rightarrow 0 \}), \mathbf{x1}_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]} \} \{ [1] \};$ 
 $\varphi_1 = (\mathbf{x1}_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]} / \text{.Solve}[\text{system1a}[[t[[4]]]] /$ 
 $(\delta / \{ \mathbf{x1}_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]} \rightarrow 1 \}), \mathbf{x1}_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]} \} \{ [1] \}) - 1;$ 
 $\delta = \left\{ \mathbf{x1}_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]} \rightarrow \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1} \right\};$ 
}];
 $\delta_{1,2,1} = \text{Join} [\delta_{1,2,1} / \delta, \delta];$ 
}];
}];

```

```

system1b = system1;
system1b[[1]] = system1b[[1]] / {x12,1 → 0};
system1b[[2]] = system1b[[2]] / {x12,1 → 0};
system1b[[2]] = system1b[[2]] / {x12,3 → 1};
system1b[[3]] = system1b[[3]] / {x12,3 → 1};

```

```

 $\delta_{1,2,3} = \{ \mathbf{x1}_{2,1} \rightarrow 0, \mathbf{x1}_{2,3} \rightarrow 1 \};$ 

```

```

For[i = 1, i ≤ 3, ++i,
{
If[d[[t[[i]]]] == 1,
 $\delta = \text{Solve} [\text{system1b}[[t[[i]]]], \mathbf{x1}_{\text{Abs}[p[[t[[i]]]],t[[i]]} \} \{ [1] \},$ 
 $\delta = \text{Solve} [\text{system1b}[[t[[i]]]], \mathbf{x1}_{t[[i]],\text{Abs}[p[[t[[i]]]]} \} \{ [1] \}];$ 
 $\delta_{1,2,3} = \text{Join} [\delta_{1,2,3}, \delta];$ 
If[i ≠ 3,
system1b[[Abs[p[[t[[i]]]]]] = system1b[[Abs[p[[t[[i]]]]]] /  $\delta$ ,

```

```

{
If[d[[t[[4]]]] == 1,
{
 $\varphi_0 = x1_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]} / \text{Solve}[\text{system1b}[[t[[4]]]] /$ 
 $(\delta / \{x1_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]} \rightarrow 0\}), x1_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]} [[1]];$ 
 $\varphi_1 = (x1_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]} / \text{Solve}[\text{system1b}[[t[[4]]]] /$ 
 $(\delta / \{x1_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]} \rightarrow 1\}), x1_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]} [[1]]) - 1;$ 
 $\delta = \left\{ x1_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]} \rightarrow \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1} \right\};$ 
},
{
 $\varphi_0 = x1_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]} / \text{Solve}[\text{system1b}[[t[[4]]]] /$ 
 $(\delta / \{x1_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]} \rightarrow 0\}), x1_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]} [[1]];$ 
 $\varphi_1 = (x1_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]} / \text{Solve}[\text{system1b}[[t[[4]]]] /$ 
 $(\delta / \{x1_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]} \rightarrow 1\}), x1_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]} [[1]]) - 1;$ 
 $\delta = \left\{ x1_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]} \rightarrow \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1} \right\};$ 
}];
 $\delta_{1,2,3} = \text{Join} [\delta_{1,2,3} / \delta, \delta];$ 
}];
}];

```

```

system2 = {
 $x_{2,1,3} + x_{2,1,4} - \frac{1}{10}x_{2,2,1} == 0,$ 
 $x_{2,2,1} + x_{2,2,3} + x_{2,2,4} == 0,$ 
 $x_{2,3,4} - \frac{6}{10}x_{2,1,3} - \frac{9}{10}x_{2,2,3} == 0,$ 
 $-\frac{5}{10}x_{2,1,4} - \frac{3}{10}x_{2,2,4} - \frac{3}{10}x_{2,3,4} == 0$ 
};

```

```

t = {2,3,4,1};
p = {-3,4, -4, -1};
d = {-1, -1, -1,1};

```

```

system2a = system2;
system2a[[1]] = system2a[[1]] / {x2,1 → 1};
system2a[[2]] = system2a[[2]] / {x2,1 → 1};
system2a[[2]] = system2a[[2]] / {x2,3 → 0};

```

$\text{system2a}[[3]] = \text{system2a}[[3]]/. \{x_{2,3} \rightarrow 0\};$

$\delta_{2,1} = \{x_{2,1} \rightarrow 1, x_{2,3} \rightarrow 0\};$

For[$i = 1, i \leq 3, ++i,$

{

If[$d[[t[[i]]]] == 1,$

$\delta = \text{Solve}[\text{system2a}[[t[[i]]], x_{2\text{Abs}[p[[t[[i]]]], t[[i]]]}] [[1]],$

$\delta = \text{Solve}[\text{system2a}[[t[[i]]], x_{2_{t[[i]], \text{Abs}[p[[t[[i]]]]}}] [[1]]];$

$\delta_{2,1} = \text{Join}[\delta_{2,1}, \delta];$

If[$i \neq 3,$

$\text{system2a}[[\text{Abs}[p[[t[[i]]]]]] = \text{system2a}[[\text{Abs}[p[[t[[i]]]]]]/. \delta,$

{

If[$d[[t[[4]]]] == 1,$

{

$\varphi_0 = x_{2\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]} /. \text{Solve}[\text{system2a}[[t[[4]]]]/.$

$(\delta /. \{x_{2\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]} \rightarrow 0\}), x_{2\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]} [[1]]];$

$\varphi_1 = (x_{2\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]} /. \text{Solve}[\text{system2a}[[t[[4]]]]/.$

$(\delta /. \{x_{2\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]} \rightarrow 1\}), x_{2\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]} [[1]]) - 1;$

$\delta = \left\{ x_{2\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]} \rightarrow \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1} \right\};$

},

{

$\varphi_0 = x_{2_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]}} /. \text{Solve}[\text{system2a}[[t[[4]]]]/.$

$(\delta /. \{x_{2_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]} \rightarrow 0\}), x_{2_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]} [[1]]];$

$\varphi_1 = (x_{2_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]} /. \text{Solve}[\text{system2a}[[t[[4]]]]/.$

$(\delta /. \{x_{2_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]} \rightarrow 1\}), x_{2_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]} [[1]]) - 1;$

$\delta = \left\{ x_{2_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]} \rightarrow \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1} \right\};$

}};

$\delta_{2,1} = \text{Join}[\delta_{2,1}/.\delta, \delta];$

}};

}};

$\text{system2b} = \text{system2};$

$\text{system2b}[[1]] = \text{system2b}[[1]]/. \{x_{2,1} \rightarrow 0\};$

$\text{system2b}[[2]] = \text{system2b}[[2]]/. \{x_{2,1} \rightarrow 0\};$

```
system2b[[2]] = system2b[[2]]/. {x22,3 → 1};
system2b[[3]] = system2b[[3]]/. {x22,3 → 1};
```

```
δ2,3 = {x22,1 → 0, x22,3 → 1};
```

```
For[i = 1, i ≤ 3, ++i,
{
If[d[[t[[i]]]] == 1,
δ = Solve[system2b[[t[[i]]], x2Abs[p[[t[[i]]]], t[[i]]]][[1]],
δ = Solve[system2b[[t[[i]]], x2t[[i], Abs[p[[t[[i]]]]]][[1]]];
δ2,3 = Join[δ2,3, δ];
If[i ≠ 3,
system2b[[Abs[p[[t[[i]]]]]] = system2b[[Abs[p[[t[[i]]]]]]/.δ,
{
If[d[[t[[4]]]] == 1,
{
φ0 = x2Abs[p[[t[[4]]]], t[[4]]]/.Solve[system2b[[t[[4]]]]/.
(δ/. {x2Abs[p[[t[[4]]]], t[[4]] → 0}), x2Abs[p[[t[[4]]]], t[[4]]]][[1]];
φ1 = (x2Abs[p[[t[[4]]]], t[[4]]]/.Solve[system2b[[t[[4]]]]/.
(δ/. {x2Abs[p[[t[[4]]]], t[[4]] → 1}), x2Abs[p[[t[[4]]]], t[[4]]]][[1]]) - 1;
δ = {x2Abs[p[[t[[4]]]], t[[4]] →  $\frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1}$ };
},
{
φ0 = x2t[[4], Abs[p[[t[[4]]]]]/.Solve[system2b[[t[[4]]]]/.
(δ/. {x2t[[4], Abs[p[[t[[4]]]]] → 0}), x2t[[4], Abs[p[[t[[4]]]]]][[1]];
φ1 = (x2t[[4], Abs[p[[t[[4]]]]]/.Solve[system2b[[t[[4]]]]/.
(δ/. {x2t[[4], Abs[p[[t[[4]]]]] → 1}), x2t[[4], Abs[p[[t[[4]]]]]][[1]]) - 1;
δ = {x2t[[4], Abs[p[[t[[4]]]]] →  $\frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1}$ };
}}];
δ2,3 = Join[δ2,3/.δ, δ];
}];
}];
```

```
system3 = {x31,3 + x31,4 -  $\frac{5}{10}$ x32,1 == 0,
```

$$\begin{aligned}
& x3_{2,1} + x3_{2,3} + x3_{2,4} == 0, \\
& x3_{3,4} - \frac{8}{10}x3_{1,3} - \frac{2}{10}x3_{2,3} == 0, \\
& -\frac{5}{10}x3_{1,4} - \frac{4}{10}x3_{2,4} - \frac{3}{10}x3_{3,4} == 0 \}; \\
& t = \{2,3,4,1\}; \\
& p = \{-3,4, -4, -1\}; \\
& d = \{-1, -1, -1,1\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{system3a} = \text{system3}; \\
& \text{system3a}[[1]] = \text{system3a}[[1]]/. \{x3_{2,1} \rightarrow 1\}; \\
& \text{system3a}[[2]] = \text{system3a}[[2]]/. \{x3_{2,1} \rightarrow 1\}; \\
& \text{system3a}[[2]] = \text{system3a}[[2]]/. \{x3_{2,3} \rightarrow 0\}; \\
& \text{system3a}[[3]] = \text{system3a}[[3]]/. \{x3_{2,3} \rightarrow 0\};
\end{aligned}$$

$$\delta3_{2,1} = \{x3_{2,1} \rightarrow 1, x3_{2,3} \rightarrow 0\};$$

$$\begin{aligned}
& \text{For}[i = 1, i \leq 3, ++i, \\
& \{ \\
& \text{If}[d[[t[[i]]]] == 1, \\
& \delta = \text{Solve}[\text{system3a}[[t[[i]]]], x3_{\text{Abs}[p[[t[[i]]]], t[[i]]}] [[1]], \\
& \delta = \text{Solve}[\text{system3a}[[t[[i]]]], x3_{t[[i]], \text{Abs}[p[[t[[i]]]]}] [[1]]]; \\
& \delta3_{2,1} = \text{Join}[\delta3_{2,1}, \delta]; \\
& \text{If}[i \neq 3, \\
& \text{system3a}[[\text{Abs}[p[[t[[i]]]]]]] = \text{system3a}[[\text{Abs}[p[[t[[i]]]]]]]/\delta, \\
& \{ \\
& \text{If}[d[[t[[4]]]] == 1, \\
& \{ \\
& \varphi_0 = x3_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]} /. \text{Solve}[\text{system3a}[[t[[4]]]]/. \\
& (\delta /. \{x3_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]} \rightarrow 0\}), x3_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]}] [[1]]; \\
& \varphi_1 = (x3_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]} /. \text{Solve}[\text{system3a}[[t[[4]]]]/. \\
& (\delta /. \{x3_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]} \rightarrow 1\}), x3_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]}] [[1]]) - 1; \\
& \delta = \{x3_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]} \rightarrow \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1}\}; \\
& \}, \\
& \{ \\
& \varphi_0 = x3_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]} /. \text{Solve}[\text{system3a}[[t[[4]]]]/. \\
& (\delta /. \{x3_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]} \rightarrow 0\}), x3_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]}] [[1]];
\end{aligned}$$

```

 $\varphi_1 = (x_{3_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]]} / . \text{Solve}[\text{system3a}[[t[[4]]]]] / .$ 
 $(\delta / . \{x_{3_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]]} \rightarrow 1\}), x_{3_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]]} [[1]] - 1;$ 
 $\delta = \{x_{3_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]]} \rightarrow \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1}\};$ 
 $\};$ 
 $\delta_{3_{2,1}} = \text{Join}[\delta_{3_{2,1}} / . \delta, \delta];$ 
 $\};$ 
 $\};$ 

```

```

system3b = system3;
system3b[[1]] = system3b[[1]] / . {x32,1 → 0};
system3b[[2]] = system3b[[2]] / . {x32,1 → 0};
system3b[[2]] = system3b[[2]] / . {x32,3 → 1};
system3b[[3]] = system3b[[3]] / . {x32,3 → 1};

```

```

 $\delta_{3_{2,3}} = \{x_{3_{2,1}} \rightarrow 0, x_{3_{2,3}} \rightarrow 1\};$ 

```

```

For[ $i = 1, i \leq 3, ++i,$ 
{
If[ $d[[t[[i]]]] == 1,$ 
 $\delta = \text{Solve}[\text{system3b}[[t[[i]]]], x_{3_{\text{Abs}[p[[t[[i]]]], t[[i]]]}] [[1]],$ 
 $\delta = \text{Solve}[\text{system3b}[[t[[i]]]], x_{3_{t[[i]], \text{Abs}[p[[t[[i]]]]]}] [[1]]];$ 
 $\delta_{3_{2,3}} = \text{Join}[\delta_{3_{2,3}}, \delta];$ 
If[ $i \neq 3,$ 
system3b[[Abs[p[[t[[i]]]]]] = system3b[[Abs[p[[t[[i]]]]]]] / .  $\delta,$ 
{
If[ $d[[t[[4]]]] == 1,$ 
{
 $\varphi_0 = x_{3_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]]} / . \text{Solve}[\text{system3b}[[t[[4]]]]] / .$ 
 $(\delta / . \{x_{3_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]]} \rightarrow 0\}), x_{3_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]]} [[1]];$ 
 $\varphi_1 = (x_{3_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]]} / . \text{Solve}[\text{system3b}[[t[[4]]]]] / .$ 
 $(\delta / . \{x_{3_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]]} \rightarrow 1\}), x_{3_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]]} [[1]] - 1;$ 
 $\delta = \{x_{3_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]], t[[4]]]} \rightarrow \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1}\};$ 
 $\},$ 
{
 $\varphi_0 = x_{3_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]]} / . \text{Solve}[\text{system3b}[[t[[4]]]]] / .$ 
 $(\delta / . \{x_{3_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]]} \rightarrow 0\}), x_{3_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]]} [[1]];$ 

```

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (x_{3_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]]}] / \text{Solve}[\text{system3b}[[t[[4]]]]] / \\ &(\delta / \{x_{3_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]]}] \rightarrow 1\}), x_{3_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]]}] [[1]] - 1; \\ \delta &= \{x_{3_{t[[4]], \text{Abs}[p[[t[[4]]]]]}] \rightarrow \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1}\}; \\ &]; \\ \delta_{3_{2,3}} &= \text{Join}[\delta_{3_{2,3}} / \delta, \delta]; \\ &]; \\ &]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{system1} &= \left\{ x_{1_{1,3}} + x_{1_{1,4}} - \frac{1}{10} x_{1_{2,1}} == \frac{62}{10}, \right. \\ &x_{1_{2,1}} + x_{1_{2,3}} + x_{1_{2,4}} == 20, \\ &x_{1_{3,4}} - \frac{6}{10} x_{1_{1,3}} - \frac{9}{10} x_{1_{2,3}} == -\frac{43}{10}, \\ &\left. -\frac{9}{10} x_{1_{1,4}} - \frac{1}{2} x_{1_{2,4}} - \frac{8}{10} x_{1_{3,4}} == -10 \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= \{2, 3, 4, 1\}; \\ p &= \{-3, 4, -4, -1\}; \\ d &= \{-1, -1, -1, 1\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{system1}[[1]] &= \text{system1}[[1]] / \{x_{1_{2,1}} \rightarrow 0\}; \\ \text{system1}[[2]] &= \text{system1}[[2]] / \{x_{1_{2,1}} \rightarrow 0\}; \\ \text{system1}[[2]] &= \text{system1}[[2]] / \{x_{1_{2,3}} \rightarrow 0\}; \\ \text{system1}[[3]] &= \text{system1}[[3]] / \{x_{1_{2,3}} \rightarrow 0\}; \end{aligned}$$

$$\overline{\delta I} = \{x_{1_{2,1}} \rightarrow 0, x_{1_{2,3}} \rightarrow 0\};$$

$$\begin{aligned} &\text{For}[i = 1, i \leq 3, ++i, \\ &\{ \\ &\text{If}[d[[t[[i]]]] == 1, \\ &\delta = \text{Solve}[\text{system1}[[t[[i]]]], x_{1_{\text{Abs}[p[[t[[i]]]]], t[[i]]}}] [[1]], \\ &\delta = \text{Solve}[\text{system1}[[t[[i]]]], x_{1_{t[[i]], \text{Abs}[p[[t[[i]]]]}}] [[1]]]; \\ &\overline{\delta I} = \text{Join}[\overline{\delta I}, \delta]; \\ &\text{If}[i \neq 3, \\ &\text{system1}[[\text{Abs}[p[[t[[i]]]]]]] = \text{system1}[[\text{Abs}[p[[t[[i]]]]]]] / \delta, \\ &\{ \\ &\text{If}[d[[t[[4]]]] == 1, \\ &\{ \end{aligned}$$

```

 $\varphi_0 = \text{X1}_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]]}/.\text{Solve}[\text{system1}[[t[[4]]]]]/.$ 
```

 $(\delta/. \{ \text{X1}_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]] \rightarrow 0} \}, \text{X1}_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]]} [[1]]);$
 $\varphi_1 = (\text{X1}_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]]}/.\text{Solve}[\text{system1}[[t[[4]]]]]/.$
 $(\delta/. \{ \text{X1}_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]] \rightarrow 1} \}, \text{X1}_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]]} [[1]]) - 1;$
 $\delta = \{ \text{X1}_{\text{Abs}[p[[t[[4]]]],t[[4]]] \rightarrow \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1}} \};$
 $\};$
 $\{$
 $\varphi_0 = \text{X1}_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]]}/.\text{Solve}[\text{system1}[[t[[4]]]]]/.$
 $(\delta/. \{ \text{X1}_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]] \rightarrow 0} \}, \text{X1}_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]]} [[1]]);$
 $\varphi_1 = (\text{X1}_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]]}/.\text{Solve}[\text{system1}[[t[[4]]]]]/.$
 $(\delta/. \{ \text{X1}_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]] \rightarrow 1} \}, \text{X1}_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]]} [[1]]) - 1;$
 $\delta = \{ \text{X1}_{t[[4]],\text{Abs}[p[[t[[4]]]]] \rightarrow \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1}} \};$
 $\};$
 $\delta\bar{1} = \text{Join}[\bar{\delta 1}/\delta,\delta];$
 $\};$
 $\};$

$$\text{system2} = \left\{ \begin{aligned} x_{2,3} + x_{2,4} - \frac{1}{10}x_{2,1} &== \frac{92}{10}, \\ x_{2,1} + x_{2,3} + x_{2,4} &== 17, \\ x_{2,4} - \frac{6}{10}x_{2,3} - \frac{9}{10}x_{2,1} &== -\frac{103}{10}, \\ -\frac{5}{10}x_{2,4} - \frac{3}{10}x_{2,1} - \frac{3}{10}x_{2,3} &== -\frac{21}{10} \end{aligned} \right\};$$

$$t = \{2,3,4,1\};$$

$$p = \{-3,4, -4, -1\};$$

$$d = \{-1, -1, -1,1\};$$

$$\text{system2}[[1]] = \text{system2}[[1]]/. \{x_{2,1} \rightarrow 0\};$$

$$\text{system2}[[2]] = \text{system2}[[2]]/. \{x_{2,1} \rightarrow 0\};$$

$$\text{system2}[[2]] = \text{system2}[[2]]/. \{x_{2,3} \rightarrow 0\};$$

$$\text{system2}[[3]] = \text{system2}[[3]]/. \{x_{2,3} \rightarrow 0\};$$

$$\bar{\delta 2} = \{x_{2,1} \rightarrow 0, x_{2,3} \rightarrow 0\};$$

$$\text{For}[i = 1, i \leq 3, ++i,$$

$$\{$$

```

If[d[[t[[i]]]] == 1,
δ = Solve [system2[[t[[i]]],x2Abs[p[[t[[i]]]],t[[i]]] [[1]],
δ = Solve [system2[[t[[i]]],x2t[[i]],Abs[p[[t[[i]]]]] [[1]]];
δ2 = Join [δ2,δ];
If[i ≠ 3,
system2[[Abs[p[[t[[i]]]]]] = system2[[Abs[p[[t[[i]]]]]]/δ,
{
If[d[[t[[4]]]] == 1,
{
φ0 = x2Abs[p[[t[[4]]]],t[[4]]/.Solve[system2[[t[[4]]]]/.
(δ/. {x2Abs[p[[t[[4]]]],t[[4]] → 0}),x2Abs[p[[t[[4]]]],t[[4]]] [[1]];
φ1 = (x2Abs[p[[t[[4]]]],t[[4]]/.Solve[system2[[t[[4]]]]/.
(δ/. {x2Abs[p[[t[[4]]]],t[[4]] → 1}),x2Abs[p[[t[[4]]]],t[[4]]] [[1]]) - 1;
δ = {x2Abs[p[[t[[4]]]],t[[4]] → φ0/φ0-φ1};
},
{
φ0 = x2t[[4]],Abs[p[[t[[4]]]]/.Solve[system2[[t[[4]]]]/.
(δ/. {x2t[[4]],Abs[p[[t[[4]]]] → 0}),x2t[[4]],Abs[p[[t[[4]]]]] [[1]];
φ1 = (x2t[[4]],Abs[p[[t[[4]]]]/.Solve[system2[[t[[4]]]]/.
(δ/. {x2t[[4]],Abs[p[[t[[4]]]] → 1}),x2t[[4]],Abs[p[[t[[4]]]]] [[1]]) - 1;
δ = {x2t[[4]],Abs[p[[t[[4]]]] → φ0/φ0-φ1};
}}];
δ2 = Join [δ2/.δ,δ];
}];
}];

```

```

system3 = {x31,3 + x31,4 - 5/10 x32,1 == 12,
x32,1 + x32,3 + x32,4 == 20,
x33,4 - 8/10 x31,3 - 2/10 x32,3 == -16/10,
-5/10 x31,4 - 4/10 x32,4 - 3/10 x33,4 == -76/10};
t = {2,3,4,1};
p = {-3,4, -4, -1};
d = {-1, -1, -1,1};

```

```

system3[[1]] = system3[[1]]/. {x32,1 → 0} ;
system3[[2]] = system3[[2]]/. {x32,1 → 0} ;
system3[[2]] = system3[[2]]/. {x32,3 → 0} ;
system3[[3]] = system3[[3]]/. {x32,3 → 0} ;

```

```

δ̄3 = {x32,1 → 0, x32,3 → 0} ;

```

```

For[i = 1, i ≤ 3, ++i,
{
If[d[[t[[i]]]] == 1,
δ = Solve [system3[[t[[i]]], x3Abs[p[[t[[i]]], t[[i]]]] [[1]],
δ = Solve [system3[[t[[i]]], x3t[[i], Abs[p[[t[[i]]]]]] [[1]]] ;
δ̄3 = Join [δ̄3, δ] ;
If[i ≠ 3,
system3[[Abs[p[[t[[i]]]]]] = system3[[Abs[p[[t[[i]]]]]]/.δ,
{
If[d[[t[[4]]]] == 1,
{
φ0 = x3Abs[p[[t[[4]]], t[[4]]]/.Solve[system3[[t[[4]]]]/.
(δ/. {x3Abs[p[[t[[4]]], t[[4]]] → 0}), x3Abs[p[[t[[4]]], t[[4]]] [[1]] ;
φ1 = (x3Abs[p[[t[[4]]], t[[4]]]/.Solve[system3[[t[[4]]]]/.
(δ/. {x3Abs[p[[t[[4]]], t[[4]]] → 1}), x3Abs[p[[t[[4]]], t[[4]]] [[1]]] - 1 ;
δ = {x3Abs[p[[t[[4]]], t[[4]]] →  $\frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1}$ } ;
},
{
φ0 = x3t[[4], Abs[p[[t[[4]]]]]/.Solve[system3[[t[[4]]]]/.
(δ/. {x3t[[4], Abs[p[[t[[4]]]]] → 0}), x3t[[4], Abs[p[[t[[4]]]]] [[1]] ;
φ1 = (x3t[[4], Abs[p[[t[[4]]]]]/.Solve[system3[[t[[4]]]]/.
(δ/. {x3t[[4], Abs[p[[t[[4]]]]] → 1}), x3t[[4], Abs[p[[t[[4]]]]] [[1]]] - 1 ;
δ = {x3t[[4], Abs[p[[t[[4]]]]] →  $\frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_1}$ } ;
}}];
δ̄3 = Join [δ̄3/.δ, δ] ;
}];
}];
}];

```

```

R112,1 = 4x11,3 + 5x12,1 + 6x12,3 + 8x12,4 + 5x13,4/.δ12,1;

```

$$\begin{aligned} R21_{2,1} &= 7x1_{1,3} + 7x1_{1,4} + 9x1_{2,1} + 3x1_{2,3} + 6x1_{2,4} + 9x1_{3,4}/\delta1_{2,1}; \\ R31_{2,1} &= 0x1_{1,3} + 0x1_{1,4} + x1_{2,1} + 0x1_{2,4} + 0x1_{3,4}/\delta1_{2,1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R11_{2,3} &= 4x1_{1,3} + 5x1_{2,1} + 6x1_{2,3} + 8x1_{2,4} + 5x1_{3,4}/\delta1_{2,3}; \\ R21_{2,3} &= 7x1_{1,3} + 7x1_{1,4} + 9x1_{2,1} + 3x1_{2,3} + 6x1_{2,4} + 9x1_{3,4}/\delta1_{2,3}; \\ R31_{2,3} &= 0x1_{1,3} + 0x1_{1,4} + 0x1_{2,3} + 0x1_{2,4} + 0x1_{3,4}/\delta1_{2,3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R12_{2,1} &= 7x2_{1,3} + 5x2_{2,1} + 7x2_{2,3} + 7x2_{2,4} + 7x2_{3,4}/\delta2_{2,1}; \\ R22_{2,1} &= 9x2_{1,3} + 9x2_{1,4} + 5x2_{2,1} + x2_{2,3} + 4x2_{2,4} + 5x2_{3,4}/\delta2_{2,1}; \\ R32_{2,1} &= 0x2_{1,3} + 0x2_{1,4} + x2_{2,1} + 0x2_{2,4} + 0x2_{3,4}/\delta2_{2,1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R12_{2,3} &= 7x2_{1,3} + 5x2_{2,1} + 7x2_{2,3} + 7x2_{2,4} + 7x2_{3,4}/\delta2_{2,3}; \\ R22_{2,3} &= 9x2_{1,3} + 9x2_{1,4} + 5x2_{2,1} + x2_{2,3} + 4x2_{2,4} + 5x2_{3,4}/\delta2_{2,3}; \\ R32_{2,3} &= 0x2_{1,3} + 0x2_{1,4} + 0x2_{2,3} + 0x2_{2,4} + 0x2_{3,4}/\delta2_{2,3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R13_{2,1} &= x3_{1,3} + 6x3_{1,4} + 3x3_{2,1} + 2x3_{2,3} + x3_{2,4} + 4x3_{3,4}/\delta3_{2,1}; \\ R23_{2,1} &= 8x3_{1,3} + 8x3_{1,4} + 9x3_{2,1} + 9x3_{2,3} + 3x3_{3,4}/\delta3_{2,1}; \\ R33_{2,1} &= 0x3_{1,3} + 0x3_{1,4} + x3_{2,1} + 0x3_{2,4} + 0x3_{3,4}/\delta3_{2,1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R13_{2,3} &= x3_{1,3} + 6x3_{1,4} + 3x3_{2,1} + 2x3_{2,3} + x3_{2,4} + 4x3_{3,4}/\delta3_{2,3}; \\ R23_{2,3} &= 8x3_{1,3} + 8x3_{1,4} + 9x3_{2,1} + 9x3_{2,3} + 3x3_{3,4}/\delta3_{2,3}; \\ R33_{2,3} &= 0x3_{1,3} + 0x3_{1,4} + 0x3_{2,3} + 0x3_{2,4} + 0x3_{3,4}/\delta3_{2,3}; \end{aligned}$$

$$DD = \begin{pmatrix} R11_{2,1} & R12_{2,1} & R13_{2,1} \\ R21_{2,1} & R22_{2,1} & R23_{2,1} \\ R31_{2,1} & R32_{2,1} & R33_{2,1} \end{pmatrix};$$

$$A_1 = 439 - (4x1_{1,3} + 7x2_{1,3} + x3_{1,3} + 6x3_{1,4} + 5x1_{2,1} + 5x2_{2,1} + 3x3_{2,1} + 6x1_{2,3} + 7x2_{2,3} + 2x3_{2,3} + 8x1_{2,4} + 7x2_{2,4} + x3_{2,4} + 5x1_{3,4} + 7x2_{3,4} + 4x3_{3,4})/\delta1/\delta2/\delta3;$$

$$A_2 = 644 - (7x1_{1,3} + 9x2_{1,3} + 8x3_{1,3} + 7x1_{1,4} + 9x2_{1,4} + 8x3_{1,4} + 9x1_{2,1} + 5x2_{2,1} + 9x3_{2,1} + 3x1_{2,3} + x2_{2,3} + 9x3_{2,3} + 6x1_{2,4} + 4x2_{2,4} + 9x1_{3,4} + 5x2_{3,4} + 3x3_{3,4})/\delta1/\delta2/\delta3;$$

$$A_3 = 28 - (x1_{2,1} + x2_{2,1} + x3_{2,1})/\delta1/\delta2/\delta3;$$

$$\beta_1 = A_1 - (R11_{2,3}y1_{2,3} + R12_{2,3}y2_{2,3} + R13_{2,3}y3_{2,3});$$

$$\beta_2 = A_2 - (R21_{2,3}y1_{2,3} + R22_{2,3}y2_{2,3} + R23_{2,3}y3_{2,3});$$

$$\beta_3 = A_3 - (R31_{2,3}y1_{2,3} + R32_{2,3}y2_{2,3} + R33_{2,3}y3_{2,3});$$

$$Y = \text{Simplify} \left[\text{Inverse}[\text{DD}] \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \right];$$

$$\text{rule1} = \{x1_{2,1} \rightarrow Y[[1]][[1]], x2_{2,1} \rightarrow Y[[2]][[1]], x3_{2,1} \rightarrow Y[[3]][[1]], \\ x1_{2,3} \rightarrow y1_{2,3}, x2_{2,3} \rightarrow y2_{2,3}, x3_{2,3} \rightarrow y3_{2,3}\};$$

$$\text{rule2} = \{x1_{1,3} \rightarrow x1_{2,1} (x1_{1,3}/.\delta1_{2,1}) + x1_{2,3} (x1_{1,3}/.\delta1_{2,3}) + (x1_{1,3}/.\overline{\delta1}),$$

$$x1_{1,4} \rightarrow x1_{2,1} (x1_{1,4}/.\delta1_{2,1}) + x1_{2,3} (x1_{1,4}/.\delta1_{2,3}) + (x1_{1,4}/.\overline{\delta1}),$$

$$x1_{2,4} \rightarrow x1_{2,1} (x1_{2,4}/.\delta1_{2,1}) + x1_{2,3} (x1_{2,4}/.\delta1_{2,3}) + (x1_{2,4}/.\overline{\delta1}),$$

$$x1_{3,4} \rightarrow x1_{2,1} (x1_{3,4}/.\delta1_{2,1}) + x1_{2,3} (x1_{3,4}/.\delta1_{2,3}) + (x1_{3,4}/.\overline{\delta1}),$$

$$x2_{1,3} \rightarrow x2_{2,1} (x2_{1,3}/.\delta2_{2,1}) + x2_{2,3} (x2_{1,3}/.\delta2_{2,3}) + (x2_{1,3}/.\overline{\delta2}),$$

$$x2_{1,4} \rightarrow x2_{2,1} (x2_{1,4}/.\delta2_{2,1}) + x2_{2,3} (x2_{1,4}/.\delta2_{2,3}) + (x2_{1,4}/.\overline{\delta2}),$$

$$x2_{2,4} \rightarrow x2_{2,1} (x2_{2,4}/.\delta2_{2,1}) + x2_{2,3} (x2_{2,4}/.\delta2_{2,3}) + (x2_{2,4}/.\overline{\delta2}),$$

$$x2_{3,4} \rightarrow x2_{2,1} (x2_{3,4}/.\delta2_{2,1}) + x2_{2,3} (x2_{3,4}/.\delta2_{2,3}) + (x2_{3,4}/.\overline{\delta2}),$$

$$x3_{1,3} \rightarrow x3_{2,1} (x3_{1,3}/.\delta3_{2,1}) + x3_{2,3} (x3_{1,3}/.\delta3_{2,3}) + (x3_{1,3}/.\overline{\delta3}),$$

$$x3_{1,4} \rightarrow x3_{2,1} (x3_{1,4}/.\delta3_{2,1}) + x3_{2,3} (x3_{1,4}/.\delta3_{2,3}) + (x3_{1,4}/.\overline{\delta3}),$$

$$x3_{2,4} \rightarrow x3_{2,1} (x3_{2,4}/.\delta3_{2,1}) + x3_{2,3} (x3_{2,4}/.\delta3_{2,3}) + (x3_{2,4}/.\overline{\delta3}),$$

$$x3_{3,4} \rightarrow x3_{2,1} (x3_{3,4}/.\delta3_{2,1}) + x3_{2,3} (x3_{3,4}/.\delta3_{2,3}) + (x3_{3,4}/.\overline{\delta3});$$

$$\text{solution} = \text{Simplify}[\text{Join}[\text{rule1}, \text{rule2}/.\text{rule1}]];$$

$$\text{system} = \text{Simplify}[\text{system}/.\text{solution}];$$

Print[system];

Print[solution];

{True, True, True, True, True, True, True, True, True,

True, True, True, True, True, True}

2. ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

На обобщенной мультисети исследуются математические модели сетевых неоднородных задач дробно-линейного программирования с дополнительными ограничениями общего вида, в которых отражена взаимосвязь дуговых потоков.

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим конечную ориентированную мультисеть $G = \{I, U\}$, где I — множество узлов и U — множество дуг, $U \subseteq I \times I$, $|I| < \infty$, $|U| < \infty$. Представим мультисеть $G = \{I, U\}$ в виде семейства $\{\tilde{G}^k, k \in K\}$ связанных сетей, где

$$\tilde{G}^k = (I^k, \tilde{U}^k), I^k \subseteq I, \tilde{U}^k \subseteq U.$$

Каждая связанная сеть \tilde{G}^k соответствует некоторому типу k потока в мультисети $G = \{I, U\}$, $k \in K, |K| < \infty$. Введем для каждого узла $i \in I$ мультисети $G = \{I, U\}$ множество $K(i)$ типов потоков, проходящих через узел i :

$$K(i) = \{k \in K : i \in I^k\}.$$

Для каждой мультидуги $(i, j) \in U$ определим множество $K(i, j)$ типов потоков, проходящих через мультидугу (i, j) :

$$K(i, j) = \{k \in K : (i, j) \in \tilde{U}^k\}.$$

Аналогично множеству $K(i, j)$ для каждой мультидуги (i, j) определим множество

$$K_1(i, j) = \{k \in K : (i, j) \in \tilde{U}_1^k\}, \tilde{U}_1^k \subseteq \tilde{U}^k.$$

Итак, мультисеть G представляет собой объединение $|K|$ сетей:

$$G^k = (I^k, U^k), U^k = \{(i, j)^k : (i, j) \in \tilde{U}^k\}, k \in K.$$

Сформируем множество мультидуг U_0 , $U_0 \subseteq U$, для которого выполняются неравенства:

$$|K_0(i, j)| > 1, \text{ где } K_0(i, j) = K(i, j) \setminus K_1(i, j), (i, j) \in U_0.$$

Обозначим $U_1^k = \{(i, j)^k : (i, j) \in \widetilde{U}_1^k\}$, $k \in K$. Каждая сеть G^k имеет следующие характеристики: x_{ij}^k — поток k -го типа по дуге (i, j) (дуговой поток k -го типа); c_{ij}^k — стоимость перемещения единицы потока k -го типа по дуге $(i, j)^k$; d_{ij}^k — пропускная способность дуги (i, j) для k -го типа потока, $k \in K_1(i, j)$; d_{ij}^0 — суммарная пропускная способность мультидуги $(i, j) \in U_0$; a_i^k интенсивность узла i для k -го типа потока; $\alpha_p, p = \overline{1, l}, \lambda_{ij}^{kp} \in \mathbf{R}$.

Для каждой дуги $(i, j)^k \in U^k$ сети $G^k = (I^k, U^k)$ введем коэффициент $\mu_{ij}^k > 0$ преобразования дугового потока x_{ij}^k , $k \in K$ [3]. Дуговой поток дуги $(i, j)^k \in U^k$ величины x_{ij}^k исходит из узла i в сети $G^k = (I^k, U^k)$ и входит в узел j в преобразованном виде $\mu_{ij}^k x_{ij}^k$. Сеть $G^k = (I^k, U^k)$ называется обобщенной сетью, $k \in K$, а мультисеть $G = (I, U)$ — обобщенной мультисетью (в дальнейшем — просто сетью, если из контекста ясно, что речь идет об обобщенной мультисети).

На обобщенной мультисети $G = (I, U)$ рассмотрим математическую модель сетевой неоднородной задачи дробно-линейного программирования:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^k + \beta}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k + \gamma} \longrightarrow \max, \quad (2.1.1)$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U^k)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = a_i^k, i \in I^k, k \in K; \quad (2.1.2)$$

$$\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = \alpha_p, p = \overline{1, l}; \quad (2.1.3)$$

$$\sum_{k \in K_0(i,j)} x_{ij}^k \leq d_{ij}^0, x_{ij}^k \geq 0, k \in K_0(i, j), (i, j) \in U_0; \quad (2.1.4)$$

$$0 \leq x_{ij}^k \leq d_{ij}^k, k \in K_1(i, j), (i, j) \in U; \quad (2.1.5)$$

$$\bar{x}_{ij}^k \geq 0, k \in K(i, j) \setminus K_1(i, j), (i, j) \in U \setminus U_0, \quad (2.1.6)$$

$$I_i^+(U^k) = \{j \in I^k : (i, j)^k \in U^k\}, I_i^-(U^k) = \{j \in I^k : (j, i)^k \in U^k\}.$$

Вектор $\bar{x} = (\bar{x}_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ называется мультипоток (планом) задачи (2.1.1) – (2.1.6), если он удовлетворяет ограничениям (2.1.2) – (2.1.6).

Определение 2.1.1. Мультипоток $x^0 \in X$ (X – множество мультипотоков) называется оптимальным, если

$$\frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^{0k} + \beta}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^{0k} + \gamma} = \max_{x \in X} \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^k + \beta}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k + \gamma},$$

где $x^0 = (x_{ij}^{0k}, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$, X – множество мультипотоков

Определение 2.1.2. Мультипоток $x^\varepsilon \in X$ называется субоптимальным (ε -оптимальным), если

$$\frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^{\varepsilon k} + \beta}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^{\varepsilon k} + \gamma} - \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^{0k} + \beta}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^{0k} + \gamma} \leq \varepsilon,$$

$\forall \varepsilon \geq 0$, где $x^\varepsilon = (x_{ij}^{\varepsilon k}, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$.

Полагаем, что знаменатель

$$q(x) = \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k + \gamma$$

дробно-линейной целевой функции $f(x)$ не меняет знак на множестве мультипотоков $x \in X$.

Следовательно, без ограничения общности предположим, что знаменатель $q(x) > 0, \forall x \in X$.

На рис. 2.1 изображена обобщенная мультисеть, состоящая из пяти типов потоков $k \in K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Рассмотрим математическую модель задачи вида (2.1.1) – (2.1.6) для мультисети, которая изображена на рис. 2.1. Выполним разложение обобщенной мультисети, изображенной на рис. 2.1, на обобщенные сети G^1, G^2, G^3, G^4, G^5 . Обобщенные сети $G^k, k = \overline{1,5}$ изображены на рис. 2.2 – 2.6 соответственно.

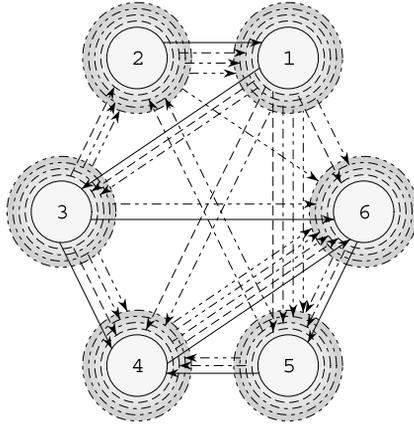


Рис. 2.1. Обобщенная мультисеть $G = (I, U)$, представленная в виде объединения $|K| = 5$ обобщенных сетей $G^k = (I^k, U^k), k \in K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Представим дробно-линейную целевую функцию вида (2.1.1) для обобщенной мультисети G , которая изображена на рис. 2.1.

Итак, дробно-линейная целевая функция имеет вид (2.1.7).

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^k + \beta}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k + \gamma} \rightarrow \max, \quad (2.1.7)$$

$$\beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
 p(x) = & 9x_{13}^1 + 6x_{21}^1 + 9x_{34}^1 + 6x_{36}^1 + 7x_{46}^1 + 9x_{54}^1 + 8x_{65}^1 + 10x_{13}^2 + \\
 & + 10x_{14}^2 + 10x_{15}^2 + 6x_{16}^2 + 5x_{32}^2 + 2x_{34}^2 + 6x_{46}^2 + 6x_{13}^3 + \\
 & + 4x_{15}^3 + 8x_{21}^3 + x_{46}^3 + 4x_{52}^3 + 10x_{54}^3 + x_{65}^3 + 6x_{14}^4 + 3x_{15}^4 + \\
 & + 6x_{16}^4 + 10x_{21}^4 + 6x_{32}^4 + 9x_{34}^4 + 3x_{36}^4 + 6x_{46}^4 + x_{52}^4 + x_{54}^4 + \\
 & + 3x_{15}^5 + 6x_{21}^5 + 4x_{26}^5 + 8x_{32}^5 + 9x_{34}^5 + x_{46}^5 + 6x_{65}^5,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q(x) = & x_{13}^1 + 11x_{21}^1 + 19x_{34}^1 + 23x_{36}^1 + 25x_{46}^1 + 32x_{54}^1 + 35x_{65}^1 + 2x_{13}^2 + \\
 & + 3x_{14}^2 + 5x_{15}^2 + 9x_{16}^2 + 16x_{32}^2 + 20x_{34}^2 + 26x_{46}^2 + 2x_{13}^3 + \\
 & + 6x_{15}^3 + 12x_{21}^3 + 27x_{46}^3 + 30x_{52}^3 + 33x_{54}^3 + 36x_{65}^3 + 4x_{14}^4 + \\
 & + 7x_{15}^4 + 10x_{16}^4 + 13x_{21}^4 + 17x_{42}^4 + 21x_{44}^4 + 24x_{46}^4 + 28x_{46}^4 + \\
 & + 31x_{52}^4 + 34x_{54}^4 + 8x_{15}^5 + 14x_{21}^5 + 15x_{26}^5 + 18x_{32}^5 + 22x_{34}^5 + \\
 & + 29x_{46}^5 + 37x_{65}^5.
 \end{aligned}$$

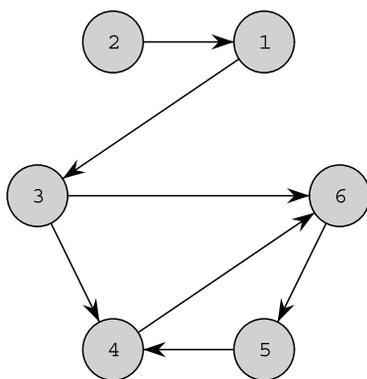


Рис. 2.2. Обобщенная сеть $G^1 = (I^1, U^1)$.

Обобщенная сеть $G^1 = (I^1, U^1)$ для первого типа потока изображена на рис. 2.2. Запишем уравнения вида (2.1.2) для первого типа потока.

Разреженная система вида (2.1.2) для первого типа потока имеет вид (2.1.8).

$$\begin{aligned}
 x_{13}^1 - \frac{7}{10} x_{21}^1 &= \frac{7}{2}, \quad x_{21}^1 = 5, \\
 x_{34}^1 + x_{36}^1 - \frac{4}{5} x_{13}^1 &= \frac{7}{5}, \\
 x_{46}^1 - \frac{9}{10} x_{34}^1 - x_{54}^1 &= \frac{3}{5}, \\
 x_{54}^1 - \frac{1}{5} x_{65}^1 &= \frac{9}{5}, \quad x_{65}^1 - \frac{1}{5} x_{36}^1 - \frac{2}{5} x_{46}^1 = -\frac{12}{5}.
 \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Обобщенная сеть $G^2 = (I^2, U^2)$ для второго типа потока изображена на рис. 2.3. Запишем уравнения вида (2.1.2) для второго типа потока.

Разреженная система вида (2.1.2) для второго типа потока имеет вид (2.1.9).

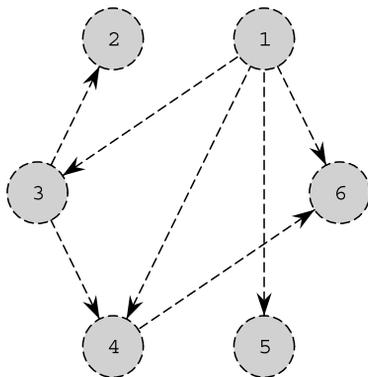


Рис. 2.3. Обобщенная сеть $G^2 = (I^2, U^2)$

$$\begin{aligned}
 x_{13}^2 + x_{14}^2 + x_{15}^2 + x_{16}^2 &= 8, \\
 -\frac{2}{5}x_{32}^2 &= -\frac{8}{5}, \\
 x_{32}^2 + x_{34}^2 - \frac{1}{5}x_{13}^2 &= \frac{62}{5}, \\
 x_{46}^2 - \frac{1}{10}x_{14}^2 - \frac{1}{10}x_{34}^2 &= 8, \\
 -\frac{1}{10}x_{15}^2 &= -\frac{1}{5}, \\
 -\frac{7}{10}x_{16}^2 - \frac{9}{10}x_{46}^2 &= -\frac{19}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Обобщенная сеть $G^3 = (I^3, U^3)$ для третьего типа потока изображена на рис. 2.4.

Запишем уравнения вида (2.1.2) для третьего типа потока.

Итак, разреженная система (2.1.2) для третьего типа потока имеет вид (2.1.10).

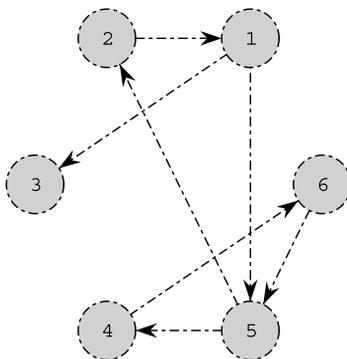
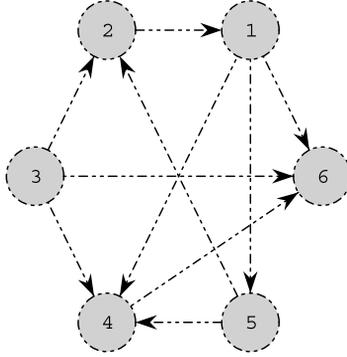


Рис. 2.4. Обобщенная сеть $G^3 = (I^3, U^3)$

Рис. 2.5. Обобщенная сеть $G^4 = (I^4, U^4)$

$$x_{13}^3 + x_{15}^3 - \frac{3}{5} x_{21}^3 = 9,$$

$$x_{21}^3 - \frac{7}{10} x_{52}^3 = -\frac{14}{5},$$

$$-x_{13}^3 = -3,$$

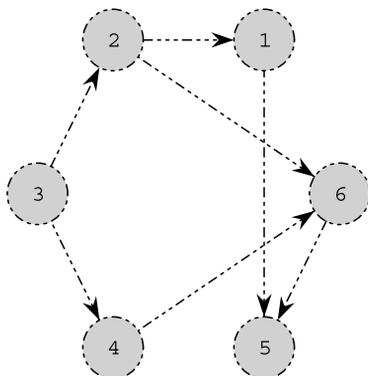
$$x_{46}^3 - \frac{2}{5} x_{54}^3 = \frac{23}{5}, \tag{2.1.10}$$

$$x_{52}^3 + x_{54}^3 - \frac{1}{5} x_{15}^3 - \frac{4}{5} x_{65}^3 = \frac{8}{5},$$

$$x_{65}^3 - \frac{7}{10} x_{46}^3 = \frac{41}{10}.$$

Обобщенные сети $G^4 = (I^4, U^4)$, $G^5 = (I^5, U^5)$ для четвертого и пятого типов потока изображены на рис. 2.5 – 2.6 соответственно. Запишем уравнения вида (2.1.2) для четвертого и пятого типов потока.

Разреженная система для четвертого типа потока имеет вид (2.1.11)

Рис. 2.6. Обобщенная сеть $G^5 = (I^5, U^5)$

$$x_{14}^4 + x_{15}^4 + x_{16}^4 - \frac{4}{5}x_{21}^4 = \frac{43}{5},$$

$$x_{21}^4 - \frac{9}{10}x_{32}^4 - \frac{1}{5}x_{52}^4 = \frac{13}{10},$$

$$x_{32}^4 + x_{34}^4 + x_{36}^4 = 20,$$

$$x_{46}^4 - \frac{1}{5}x_{14}^4 - \frac{3}{10}x_{34}^4 - \frac{7}{10}x_{54}^4 = \frac{3}{2}, \quad (2.1.11)$$

$$x_{52}^4 + x_{54}^4 - \frac{9}{10}x_{15}^4 = -\frac{1}{5},$$

$$-\frac{4}{5}x_{16}^4 - \frac{7}{10}x_{36}^4 - \frac{3}{10}x_{46}^4 = -\frac{59}{5}.$$

Разреженная система для пятого типа потока имеет вид (2.1.12)

$$\begin{aligned}
x_{15}^5 - \frac{1}{5}x_{21}^5 &= \frac{24}{5}, & x_{21}^5 + x_{26}^5 - \frac{3}{5}x_{32}^5 &= \frac{3}{5}, \\
x_{32}^5 + x_{34}^5 &= 13, \\
x_{46}^5 - \frac{3}{5}x_{34}^5 &= -\frac{22}{5}, \\
-\frac{2}{5}x_{15}^5 - \frac{7}{10}x_{65}^5 &= -\frac{31}{5}, \\
x_{65}^5 - \frac{2}{5}x_{26}^5 - \frac{1}{2}x_{46}^5 &= \frac{47}{10}.
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

Взаимосвязи дуговых потоков $x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j)$ представлены уравнениями вида (2.1.3). Уравнения (2.1.3) назовем дополнительными уравнениями общего вида. В некоторых классах задач [16, 31, 34, 36, 40, 41] дополнительные уравнения (2.1.3) имеют разреженную структуру. Использование разреженной структуры матрицы является важным элементом увеличения эффективности метода. Для совокупности сетей $G^k = (I^k, U^k), k \in K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ которые изображены на рис. 2.2–2.6 мультисети $G = (I, U)$ (см. рис. 2.1), дополнительные уравнения общего вида (2.1.3) представлены системой уравнений общего вида (2.1.13)–(2.1.14).

$$\begin{aligned}
&7x_{13}^1 + 5x_{13}^2 + 3x_{13}^3 + 4x_{14}^2 + x_{15}^2 + x_{15}^3 + 7x_{15}^4 + 6x_{15}^5 + \\
&+ 3x_{16}^2 + x_{16}^4 + 9x_{21}^1 + 6x_{21}^3 + 2x_{21}^4 + 5x_{21}^5 + 2x_{26}^5 + 9x_{32}^2 + \\
&+ 3x_{32}^4 + 2x_{32}^5 + 2x_{34}^1 + 8x_{34}^2 + x_{34}^4 + 5x_{34}^5 + 9x_{36}^4 + 5x_{46}^1 + \\
&+ 7x_{46}^2 + 2x_{46}^3 + x_{46}^4 + 4x_{46}^5 + 2x_{52}^3 + 6x_{52}^4 + x_{54}^1 + 9x_{54}^3 + \\
&+ 6x_{54}^4 + 3x_{65}^1 + 4x_{65}^3 + 8x_{65}^5 = 837.
\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

$$\begin{aligned}
&x_{13}^1 + 9x_{13}^2 + 9x_{13}^3 + 8x_{14}^2 + 3x_{14}^4 + 6x_{15}^2 + 8x_{15}^3 + 6x_{15}^4 + \\
&+ x_{15}^5 + 4x_{16}^2 + 4x_{16}^4 + 6x_{21}^1 + 2x_{21}^3 + 9x_{21}^4 + 4x_{21}^5 + x_{26}^5 + \\
&+ 3x_{32}^2 + 8x_{32}^4 + 3x_{32}^5 + 3x_{34}^2 + 2x_{34}^4 + 5x_{34}^5 + 6x_{36}^1 + 5x_{36}^4 + \\
&+ 9x_{46}^1 + 5x_{46}^2 + 9x_{46}^3 + 2x_{46}^4 + 2x_{46}^5 + 2x_{52}^3 + 8x_{52}^4 + 8x_{54}^1 + \\
&+ x_{54}^3 + 2x_{54}^4 + 6x_{65}^1 + 7x_{65}^3 + 5x_{65}^5 = 881.
\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

Неравенства (2.1.4) для мультисети $G = (I, U)$, которая изображена на рис. 2.1, имеют вид (2.1.15)

$$\begin{aligned}
 & x_{13}^2 + x_{13}^3 \leq 15, \quad x_{13}^2 \geq 0, \quad x_{13}^3 \geq 0, \\
 & x_{15}^2 + x_{15}^3 + x_{15}^5 \leq 16, \quad x_{15}^2 \geq 0, \quad x_{15}^3 \geq 0, \quad x_{15}^5 \geq 0, \\
 & x_{16}^2 + x_{16}^4 \leq 16, \quad x_{16}^2 \geq 0, \quad x_{16}^4 \geq 0, \\
 & x_{34}^2 + x_{34}^4 + x_{34}^5 \leq 30, \quad x_{34}^2 \geq 0, \quad x_{34}^4 \geq 0, \quad x_{34}^5 \geq 0, \\
 & x_{46}^1 + x_{46}^5 \leq 11, \quad x_{46}^1 \geq 0, \quad x_{46}^5 \geq 0, \\
 & x_{54}^1 + x_{54}^3 + x_{54}^4 \leq 14, \quad x_{54}^1 \geq 0, \quad x_{54}^3 \geq 0, \quad x_{54}^4 \geq 0, \\
 & x_{65}^3 + x_{65}^5 \leq 17, \quad x_{65}^3 \geq 0, \quad x_{65}^5 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Неравенства (2.1.5) для обобщенной мультисети $G = (I, U)$, которая изображена на рис. 2.1, имеют вид (2.1.16)

$$\begin{aligned}
 & 0 \leq x_{13}^1 \leq 13, \quad 0 \leq x_{14}^2 \leq 5, \quad 0 \leq x_{14}^4 \leq 10, \\
 & 0 \leq x_{15}^4 \leq 8, \quad 0 \leq x_{21}^1 \leq 9, \quad 0 \leq x_{21}^3 \leq 8, \\
 & 0 \leq x_{21}^4 \leq 16, \quad 0 \leq x_{26}^5 \leq 9, \quad 0 \leq x_{32}^2 \leq 10, \\
 & 0 \leq x_{32}^4 \leq 11, \quad 0 \leq x_{32}^5 \leq 7, \quad 0 \leq x_{34}^1 \leq 15, \\
 & 0 \leq x_{36}^1 \leq 8, \quad 0 \leq x_{36}^4 \leq 12, \quad 0 \leq x_{46}^2 \leq 14, \\
 & 0 \leq x_{46}^3 \leq 10, \quad 0 \leq x_{46}^4 \leq 10, \quad 0 \leq x_{52}^3 \leq 9, \\
 & 0 \leq x_{65}^1 \leq 5.
 \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

Неравенства (2.1.6) для обобщенной мультисети $G = (I, U)$, которая изображена на рис. 2.1, имеют вид (2.1.17)

$$x_{21}^5 \geq 0, \quad x_{52}^4 \geq 0. \tag{2.1.17}$$

В табл. 2.1.1 представлены характеристики семейства сетей обобщенной мультисети, изображенной на рис. 2.1.

Таблица 2.1.1

Характеристики семейства сетей $G^k, k = \overline{1,5}$ (см. рис. 2.2 – 2.6)

(i, j)	(1,3)					(1,4)					(1,5)				
k	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
U^k	+	+	+				+		+			+	+	+	+
U_1^k	+						+		+					+	
U_0	+										+				
$K(i, j)$	{1,2,3}					{2,4}					{2,3,4,5}				
$K_1(i, j)$	{1}					{2,4}					{4}				
$K_0(i, j)$	{2,3}										{2,3,5}				

(i, j)	(1,6)					(2,1)					(2,6)				
k	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
U^k		+		+		+		+	+	+					+
U_1^k						+		+	+						+
U_0	+														
$K(i, j)$	{2,4}					{1,3,4,5}					{5}				
$K_1(i, j)$	\emptyset					{1,3,4}					{5}				
$K_0(i, j)$	{2,4}														

(i, j)	(3,2)					(3,4)					(3,6)				
k	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
U^k		+		+	+	+	+		+	+	+			+	
U_1^k		+		+	+	+					+			+	
U_0						+									
$K(i, j)$	{2,4,5}					{1,2,4,5}					{1,4}				
$K_1(i, j)$	{2,4,5}					{1}					{1,4}				
$K_0(i, j)$						{2,4,5}									

Окончание табл. 2.1.1 (характеристики сетей $G^k, k = \overline{1,5}$)

(i, j)	(4,6)					(5,2)					(5,4)				
k	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
U^k	+	+	+	+	+			+	+		+		+	+	
U_1^k		+	+	+				+							
U_0	+										+				
$K(i, j)$	{1,2,3,4,5}					{3,4}					{1,3,4}				
$K_1(i, j)$	{2,3,4}					{3}					\emptyset				
$K_0(i, j)$	{1,5}										{1,3,4}				

Мультидуга $(i, j) = (6, 5), (6, 5) \in U_0$ имеет следующие характеристики: $K(6,5) = \{1, 3, 5\}, K_1(6,5) = \{1\}, K_0(6,5) = \{3,5\}$.

2.2. Теоретико-графовые свойства опоры

Общее определение опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}, U_S^k \subset U^k, k \in K$ обобщенной мультисети $G = (I, U)$ для линейных неоднородных задач потокового программирования введено в [10].

Определение 2.2.1. Множество дуг $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}, U_S^k \subset U^k, k \in K; U^* \subseteq \overline{U}_0, \overline{U}_0 = \{(i, j) \in U_0 : |K_S^0(i, j)| > 1\}$, где для каждой мультидуги $(i, j) \in U, K_S(i, j) = \{k \in K(i, j) : (i, j)^k \in U_S^k\}, K_S^0(i, j) = K_S(i, j) \cap K_0(i, j)$ и для каждой мультидуги (i, j) из множества U_0 , называется опорой обобщенной мультисети G задачи (2.1.1) – (2.1.6), если система

$$\sum_{j \in I_i^+(\hat{U}^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(\hat{U}^k)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = 0, i \in I^k, k \in K, \quad (2.2.1)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{(i, j)^k \in \hat{U}^k} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = 0, p = \overline{1, l}, \quad (2.2.2)$$

$$\sum_{k \in K_S^0(i, j)} x_{ij}^k = 0, (i, j) \in \hat{U}^*, \quad (2.2.3)$$

имеет только тривиальное решение $x_{ij}^k \equiv 0, (i, j)^k \in \hat{U}^k$ для множеств $\hat{U}^k = U_S^k, k \in K, \hat{U}^* = U^*, \hat{K}_S^0(i, j) = K_S^0(i, j)$, но имеет нетривиальное решение, если

- $\hat{U}^k = U_S^k, k \in K; \hat{U}^* = U^* \setminus (i_0, j_0), \text{ где } (i_0, j_0) \in U^*;$
 $\hat{K}_S^0(i, j) = K_S^0(i, j), (i, j) \in U^*;$
- $\hat{U}^k = U_S^k, k \in K \setminus k_0; \hat{U}^{k_0} = U_S^{k_0} \cup (i_0, j_0)^{k_0}, \hat{U}^* = U^*, (i_0, j_0)^{k_0} \notin U_S^{k_0};$
 $\hat{K}_S^0(i, j) = \begin{cases} K_S^0(i, j), & \text{если } (i, j) \neq (i_0, j_0), \\ K_S(i_0, j_0) \cup (k_0 \cap K_0(i, j)), & \text{если } (i, j) = (i_0, j_0). \end{cases}$

Общее определение 2.2.1 опоры U_S предполагает наличие невырожденной опорной матрицы порядка n (число дуг опоры U_S), которая строится для максимального числа дуг, которые допускают тривиальный (нулевой) поток в обобщенной сети $U_S = \{U_S^k, k \in K\}, U_S^k \subseteq U^k$ для системы (2.2.1) – (2.2.3). Подход, предложенный в [2–4, 10], основан на применении аппарата теории графов для построения решений недоопределенных систем со специальными матрицами и предполагает наличие невырожденных опорных матриц порядка m , где $m < n$, $m = n - \sum_{k \in K} |I^k|$.

При этом подходе для опоры U_S обобщенной мультисети G экстремальной дробно-линейной задачи (2.1.1) – (2.1.6) применяются алгоритмы декомпозиции, которые позволяют использовать опору U_L обобщенной сети G для разреженной системы (2.1.2) и ее теоретико-графовые свойства. Использование опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.2) позволяет решать линейные системы порядка $\sum_{k \in K} |I^k|$, используя их блочно-диагональный вид, причем для каждого блока не используется матричная форма разреженной системы. Вместо этого применяется технология представления опоры U_L в виде коллекции корневых структур [41], что позволяет хранить информацию о разреженных системах исследуемого типа в форме, свободной от матричной и использовать концепции теории графов и потоков. Использование декомпозиционного подхода к построению решений указанных разреженных систем в исследуемых дробно-линейных неоднородных задачах потокового программирования позволяет в наибольшей степени учесть априорную информацию о задаче (ее модели, свойствах, типах разреженности) и организовать такой процесс преобразования информации, в котором сведены к минимуму эвристические приемы и максимально учитывается структура математической модели.

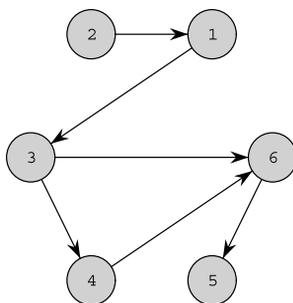


Рис. 2.7. Множество дуг U_L^1 опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12)

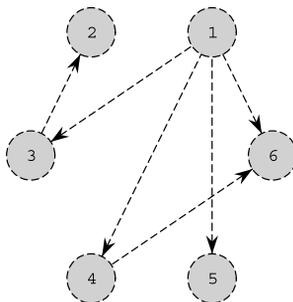


Рис. 2.8. Множество дуг U_L^2 опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12)

Выберем некоторую опору $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$, $U_L^k \subseteq U^k$ обобщенной мультисети G для разреженной системы вида (2.1.2).

Пусть выбранная опора U_L обобщенной мультисети G для системы (2.1.8) – (2.1.12) в рассматриваемом примере (2.1.7) – (2.1.17) состоит из одной компоненты связности для каждого типа потока $k \in K$, причем каждая компонента связности покрывает все узлы обобщенной сети $G^k = (I^k, U^k)$ для каждого $k \in K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Опора U_L представлена на рис. 2.7–2.10, причем единственный цикл каждой компоненты связности является невырожденным [3, 41].

Для рассматриваемой дробно-линейной экстремальной неоднородной задачи (2.1.7) – (2.1.17) построим систему характеристических век-

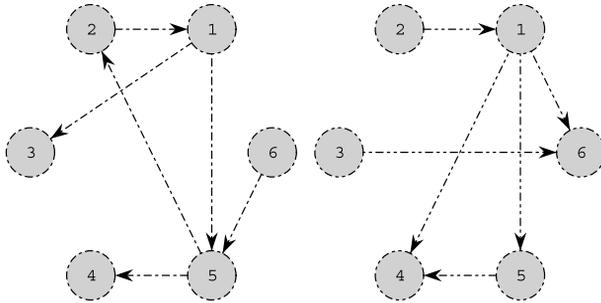


Рис. 2.9. Множества дуг $U_L^k, k = 3, 4$ опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12)

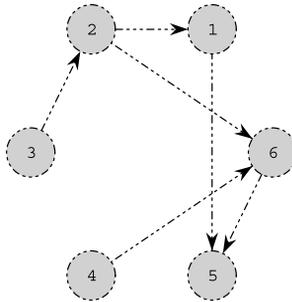


Рис. 2.10. Множество дуг U_L^5 опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12)

торов $\{\delta^k(\tau, \rho), (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k, k \in K\}, \delta^k(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^k(\tau, \rho), (i, j)^k \in U^k)$, порожденных неопорными дугами $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k, k \in K$.

Компоненты характеристических векторов $\delta^k(\tau, \rho), (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k, k \in K$, порожденных дугами

$$\{(5,4)^1, (3,4)^2 (4,6)^3 (3,2)^4, (3,4)^4, (4,6)^4 (5,2)^4 (3,4)^5\}$$

относительно выбранной опоры U_L (см. рис. 2.7–2.10), представлены в табл. 2.2.1, 2.2.2.

Общее определение 2.2.1 опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ предполагает наличие невырожденной опорной матрицы порядка n .

Таблица 2.2.1

Характеристические векторы на первой итерации

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,1)	(2,6)
$\delta^1(5,4)$	0				0	
$\delta^2(3,4)$	5	$-\frac{341}{61}$	0	$\frac{36}{61}$		
$\delta^3(4,6)$	0		$-\frac{2037}{2290}$		$-\frac{679}{458}$	
$\delta^4(3,2)$		$-\frac{1953}{8600}$	$\frac{31}{430}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{9}{10}$	
(i, j)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,1)	(2,6)
$\delta^4(3,4)$		$-\frac{201}{344}$	$-\frac{25}{86}$	$\frac{7}{8}$	0	
$\delta^4(4,6)$		$-\frac{611}{344}$	$\frac{185}{86}$	$-\frac{3}{8}$	0	
$\delta^4(5,2)$		$-\frac{1498}{1075}$	$\frac{334}{215}$	0	$\frac{1}{5}$	
$\delta^5(3,4)$			$\frac{21}{500}$		$\frac{21}{100}$	$-\frac{81}{100}$

Порядок n опорной матрицы системы (2.2.1) – (2.2.3) составляет максимальное число дуг опоры U_S , которые допускают тривиальный поток в обобщенной сети, состоящей из дуг опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K\}$, $U_S^k \subseteq U^k$, $U^* \subseteq \bar{U}_0$, $\bar{U}_0 = \{(i, j) \in U_0 : |K_S^0(i, j)| > 1\}$. Множество типов потоков $K_S(i, j)$ для дуг опоры U_S мультидуги (i, j) определено следующим образом: $K_S(i, j) = \{k \in K(i, j) : (i, j)^k \in U_S^k\}, (i, j) \in U$, $K_S^0(i, j) = K_S(i, j) \cap K_0(i, j), (i, j) \in U_0$.

Использование декомпозиционного подхода к построению решений разреженных недоопределенных систем в исследуемых дробно-линейных задачах потокового программирования основано на сведении к минимуму эвристических приемов, максимальном учете априорной инфор-

Таблица 2.2.2

Характеристические векторы на первой итерации

(i, j)	(3,2)	(3,4)	(3,6)	(4,6)	(5,2)	(5,4)	(6,5)
$\delta^1(5,4)$		$\frac{115}{4}$	$-\frac{115}{4}$	$\frac{215}{8}$		1	5
$\delta^2(3,4)$	0	1		$-\frac{28}{61}$			
$\delta^3(4,6)$				1	$-\frac{485}{229}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{10}$
$\delta^4(3,2)$	1	0	-1	0	0	$\frac{279}{4300}$	
$\delta^4(3,4)$	0	1	-1	0	0	$-\frac{45}{172}$	
$\delta^4(4,6)$	0	0	0	1	0	$\frac{333}{172}$	
$\delta^4(5,2)$	0	0	0	0	1	$\frac{428}{1075}$	
$\delta^5(3,4)$	-1	1		$\frac{3}{5}$			$-\frac{3}{125}$

мации о структуре математической модели и ее теоретико-графовых свойствах.

Применение теоретико-графовых свойств опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.2) позволяет решать линейные системы без использования их матричной формы. С этой целью используются сетевые свойства опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.2) и технология представления опоры U_L в виде коллекции корневых структур [20, 41]. Эти результаты позволяют хранить информацию о разреженных системах исследуемого типа в форме, свободной от матричной, что, естественно, увеличивает размерности решаемых задач. Исследуем теоретико-графовые свойства опоры U_S обобщенной мультисети G задачи (2.1.1) – (2.1.6), где $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$, и применим сетевые свойства опоры

Таблица 2.2.3

Характеристики опоры U_S на первой итерации

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,1)	(2,6)
$K_S(i, j)$	{1,2,3}	{2,4}	{2,3,4,5}	{2,4}	{1,3,4,5}	{5}
$K_S^1(i, j)$	{1}	{2,4}	{4}	\emptyset	{1,3,4}	{5}
$K_S^0(i, j)$	{2,3}		{2,3,5}	{2,4}		
$K_N(i, j)$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$K_N^1(i, j)$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$K_N^0(i, j)$	\emptyset		\emptyset	\emptyset		
U^*	\emptyset		\emptyset	\emptyset		
U_B	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset

(i, j)	(3,2)	(3,4)	(3,6)	(4,6)	(5,2)	(5,4)	(6,5)
$K_S(i, j)$	{2,5}	{1,2}	{1,4}	{1,2,5}	{3}	{1,3,4}	{1,3,5}
$K_S^1(i, j)$	{2,5}	{1}	{1,4}	{2}	{3}	\emptyset	{1}
$K_S^0(i, j)$		{2}		{1,5}		{1,3,4}	{3,5}
$K_N(i, j)$	{4}	{4,5}	\emptyset	{3,4}	{4}	\emptyset	\emptyset
$K_N^1(i, j)$	{4}	\emptyset	\emptyset	{3,4}	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$K_N^0(i, j)$		{4,5}		\emptyset		\emptyset	\emptyset
U^*		\emptyset		\emptyset		\emptyset	
U_B	\emptyset	{2}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	{1}	\emptyset

$U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.2) (теорема 1.3.1).

Пусть $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$, $U_L^k \subseteq U^k$ — некоторая опора обобщенной мультисети G для системы (2.1.2). Определим множество бициклических дуг $U_B = \{U_B^k \subseteq U^k \setminus U_L^k, k \in K\}$, $|U_B| = l + |U^*|$, выбрав $l + |U^*|$ произвольных дуг из множеств $U^k \setminus U_L^k$, $k \in K$.

Произвольным образом пронумеруем множество бициклических дуг:

$$t = t(\tau, \rho)^k, (\tau, \rho)^k \in U_B^k, k \in K, t \in \{1, 2, \dots, |U_B|\}, \tilde{t} = |U_B|.$$

Обозначим

$$U_N = \{U_N^k, k \in K\}, U_N^k = U^k \setminus (U_L^k \cup U_B^k), k \in K.$$

Таким образом, $U^k = U_L^k \cup U_B^k \cup U_N^k$, где U_L^k, U_B^k, U_N^k — непересекающиеся подмножества дуг множества $U^k, k \in K$. В произвольном порядке пронумеруем мультидуги множества U^* , и пусть $\xi = \xi(i, j)$ — номер мультидуги $(i, j) \in U^*$ во введенной нумерации, $\xi \in \{1, 2, \dots, |U^*|\}$. Другими словами, мы нумеруем уравнения системы (2.2.3), где каждое уравнение с номером $\xi = \xi(i, j)$ соответствует мультидуге $(i, j) \in U^*$. Обозначим

$$\delta_{ij}(B_{\tau\rho}^k) = \begin{cases} \delta_{ij}^k(\tau, \rho), k \in K_0(i, j), \\ 0, k \notin K_0(i, j), \end{cases} \quad (i, j) \in U_0, \quad (2.2.4)$$

где $B_{\tau\rho}^k = U_L^k \cup (\tau, \rho)^k$ — бицикл, порожденный дугой $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k, k \in K$. Подсчитаем числа

$$\Lambda_{\tau\rho}^{kp} = \lambda_{\tau\rho}^{kp} + \sum_{(i, j)^k \in U_L^k} \lambda_{ij}^{kp} \delta_{ij}^k(\tau, \rho), (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k, p = \overline{1, l}, k \in K. \quad (2.2.5)$$

Число $\Lambda_{\tau\rho}^{kp}$, следуя [10], назовем детерминантом бицикла $B_{\tau\rho}^k$, порожденного дугой $(\tau, \rho)^k$ относительно ограничения (2.1.3) с номером p , для фиксированного $k \in K$. Построим матрицу

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix},$$

где матрица D_1 является матрицей общего вида и состоит из детерминантов бициклов:

$$D_1 = (\Lambda_{\tau\rho}^{kp}, p = \overline{1, l}, t(\tau, \rho)^k = \overline{1, |U_B|}).$$

Матрица D_2 — разреженная матрица, состоящая из элементов (2.2.4):

$$D_2 = (\delta_{ij}(B_{\tau\rho}^k), \xi(i, j) = \overline{1, |U^*|}, t(\tau, \rho)^k = \overline{1, |U_B|}),$$

где $\xi = \xi(i, j)$ — номер мультидуги $(i, j) \in U^*, \xi \in \{1, 2, \dots, |U^*|\}$.

Матрица D определяется опорой U_S . Введем обозначения:

$$D = D(U_S), R(U_S) = \det D.$$

В дальнейшем будем называть матрицу D матрицей детерминантов бициклов, соответствующих опоре $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ обобщенной мультисети G . Фактически элементы матрицы D_2 также можно вычислять, используя формулы (2.2.5) для вычисления детерминантов бициклов, однако при построении матрицы D_2 согласно (2.2.4) учтена ее разреженность, что увеличивает эффективность алгоритма вычисления ее элементов. Обозначим $m = |U^*|, \tilde{t} = |U_B|$. Если

$$l + m \neq \tilde{t},$$

то дополним матрицу D нулями до квадратной матрицы порядка

$$\max \{\tilde{t}, l + |U^*|\}.$$

Сформулируем сетевой критерий опорности обобщенной мультисети G задачи (2.1.1) – (2.1.6).

Теорема 2.2.1. *Множество дуг*

$$U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}, U_S^k \subset U^k, k \in K; U^* \subset \bar{U}_0,$$

$$\bar{U}_0 = \{(i, j) \in U_0 : |K_S^0(i, j)| > 1\},$$

$$K_S(i, j) = \{k \in K(i, j) : (i, j)^k \in U_S^k\}, (i, j) \in U;$$

$$K_S^0(i, j) = K_S(i, j) \cap K_0(i, j), (i, j) \in U_0,$$

является опорой обобщенной мультисети $G = \{I, U\}$ задачи (2.1.1) – (2.1.6) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- $I(U_S^k) = I^k, k \in K$;
- для каждого $k \in K$ сеть $G_S^k = (I^k, U_S^k)$ является объединением $G_S^k = \bigcup_t G_S^{k,t}$ связанных компонент $G_S^{k,t} = (I(U_S^{k,t}), U_S^{k,t})$, каждая из которых содержит хотя бы один невырожденный цикл;
- $U_S^k = \bigcup_t U_S^{k,t}, I^k = \bigcup_t I(U_S^{k,t})$;
- $R(U_S) \neq 0$.

Доказательство сетевого критерия опорности (теорема 2.2.1) обобщенной мультисети G задачи (2.1.1) – (2.1.6) аналогично доказательству сетевых свойств опоры разреженных систем в линейных неоднородных задачах потокового программирования [10].

Приведем пример опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ обобщенной мультисети G экстремальной дробно-линейной задачи вида (2.1.1) – (2.1.6).

Для рассматриваемого примера (2.1.7) – (2.1.17) опора $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ включает опору $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12), которая представлена на рис. 2.7–2.10. Также в состав опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ необходимо включить множество бициклических дуг $U_B = \{(5,4)^1, (3,4)^2\}$. Положим $U^* = \emptyset$.

Выполним нумерацию дуг множества U_B .

$$t(5,4)^1 = 1, \quad t(3,4)^2 = 2.$$

Бициклические дуги $U_B = \{(5,4)^1, (3,4)^2\}$ порождают два бицикла B_{54}^1, B_{34}^2 . Построим характеристические векторы $\delta^1(5,4)$ и $\delta^2(3,4)$, порожденные дугами $(5,4)^1, (3,4)^2$:

$$\delta^1(5,4) = (\delta_{ij}^1(5,4), (i, j)^1 \in U^1),$$

$$\delta^2(3,4) = (\delta_{ij}^2(3,4), (i, j)^2 \in U^2).$$

Напомним, что компоненты характеристического вектора

$$\delta^k(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^k(\tau, \rho), (i, j)^k \in U^k),$$

порожденного дугой $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$ относительно опоры U_L^k , где $k \in K$ фиксировано, являются решением системы (2.2.6).

$$\sum_{j \in I_i^+(B_{\tau\rho}^k)} \delta_{ij}^k(\tau, \rho) - \sum_{j \in I_i^-(B_{\tau\rho}^k)} \mu_{ji}^k \delta_{ji}^k(\tau, \rho) = 0, \\ i \in I^k, B_{\tau\rho}^k = U_L^k \cup (\tau, \rho)^k, \quad (2.2.6)$$

$$\delta_{\tau\rho}^k(\tau, \rho) = 1, \delta_{ij}^k(\tau, \rho) = 0, (i, j)^k \in U^k \setminus (U_L^k \cup (\tau, \rho)^k).$$

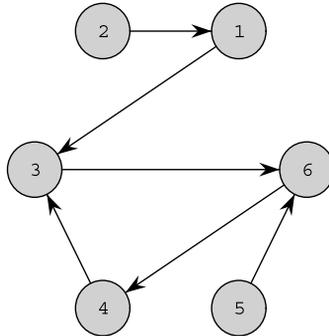
Запишем систему вида (2.2.6) для вычисления компонент характеристического вектора $\delta^1(5,4) = (\delta_{ij}^1(5,4), (i, j)^1 \in U^1)$.

$$\begin{aligned}
 \delta_{1,3}^1 - \frac{7}{10}\delta_{2,1}^1 &= 0, \\
 \delta_{2,1}^1 &= 0, \\
 \delta_{3,4}^1 + \delta_{3,6}^1 - \frac{4}{5}\delta_{1,3}^1 &= 0, \\
 \delta_{4,6}^1 - \frac{9}{10}\delta_{3,4}^1 - \delta_{5,4}^1 &= 0, \\
 \delta_{5,4}^1 - \frac{1}{5}\delta_{6,5}^1 &= 0, \\
 \delta_{6,5}^1 - \frac{1}{5}\delta_{3,6}^1 - \frac{2}{5}\delta_{4,6}^1 &= 0 \\
 \delta_{5,4}^1 &= 1.
 \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

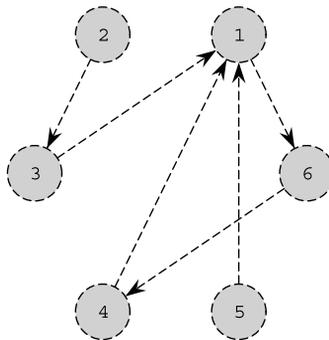
Система (2.2.6) для вычисления компонент характеристического вектора $\delta^2(3,4) = (\delta_{ij}^2(3,4), (i, j)^2 \in U^2)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 \delta_{1,3}^2 + \delta_{1,4}^2 + \delta_{1,5}^2 + \delta_{1,6}^2 &= 0, \\
 -\frac{2}{5}\delta_{3,2}^2 &= 0, \\
 \delta_{3,2}^2 + \delta_{3,4}^2 - \frac{1}{5}\delta_{1,3}^2 &= 0, \\
 \delta_{4,6}^2 - \frac{1}{10}\delta_{1,4}^2 - \frac{1}{10}\delta_{3,4}^2 &= 0, \\
 -\frac{1}{10}\delta_{1,5}^2 &= 0, \\
 -\frac{7}{10}\delta_{1,6}^2 - \frac{9}{10}\delta_{4,6}^2 &= 0, \\
 \delta_{3,4}^2 &= 1.
 \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

На рис. 2.11 и в табл. 2.2.4 представлена корневая структура, необходимая для хранения элементов множества U_L^1 , которая позволяет вычислить ненулевые компоненты характеристического вектора $\delta^1(5,4)$ за $O(n)$ операций в наихудшем случае, где $n = |I^1|$.

Рис. 2.11. Корневая структура для множества U_L^1

На рис. 2.12 и в табл. 2.2.5 представлена корневая структура, необходимая для хранения элементов множества U_L^2 , которая позволяет вычислить ненулевые компоненты характеристического вектора $\delta^2(3,4)$ за $O(n)$ операций в наихудшем случае, где $n = |I^2|$.

Рис. 2.12. Корневая структура для множества U_L^2

Приведем описание корневой структуры для множества U_L^1 , которая представлена в табл. 2.2.4 и позволяет вычислить ненулевые компоненты характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho) = \delta^1(5,4)$ (решение системы (2.2.7)) за число операций $O(n)$ в наихудшем случае, где $n = |I^k|$.

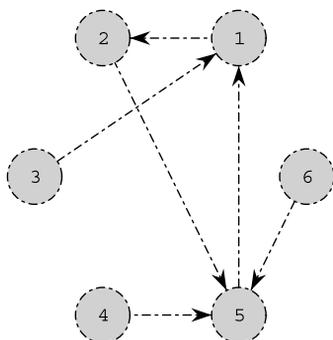
Рис. 2.13. Корневая структура для множества U_L^3

Таблица 2.2.4

Корневая структура множества U_L^1

i	1	2	3	4	5	6
$p[i]$	3	1	-6	-3	6	-4
$d[i]$	1	1	1	-1	-1	-1
$t[i]$	2	1	5	3	6	4
$depth[i]$	1	2	0	0	1	0

Для построения решения системы (2.2.7) с указанной оценкой числа операций для вычисления компонент характеристического вектора $\delta^1(5,4)$ введем следующую информацию: список $\{p[i], i \in I^1\}$ определяет для каждого узла $i \in I^1$ значение $|p[i]|$, которое является отцом узла i в корневой структуре; если $p[i] < 0$, то узел i является корнем корневой структуры; список $\{depth[i], i \in I^1\}$ содержит глубину (длину пути до корня) для каждого узла $i \in I^1$; $depth[i] = 0$, если узел i является корнем; список $\{d[i], i \in I^1\}$ определяет для каждого узла $i \in I^1$ направление дуги в корневой структуре: если узел i является корнем, то $d[i] = 0$; если дуга $(|p[i]|, i) \in U^k$, то $d[i] = -1$; если дуга $(i, |p[i]|) \in U^k$, то $d[i] = 1$.

Заметим, что если для каждого i элемент $p[i]$ списка $\{p[i], i \in I^k\}$ корневой структуры содержит информацию о родительской дуге (i, j) ,

которая соединяет узел i с узлом j — отцом узла i , то нет необходимости в хранении списка $\{d[i], i \in I^k\}$. В результате, например, корневая структура U_L^1 , которая изображена на рис. 2.11, содержит информацию, которая представлена в табл. 2.2.6.

Формируем список $\{t[i], i \in I^k\}$ следующим образом:

- для фиксированного $t = 1$, где t — номер компоненты связности U_L^{kt} , выполняем династический обход произвольного корневого дерева из коллекции корневых деревьев с корнем в узле единственного цикла компоненты связности U_L^{kt} ;
- удаляем из полученного списка корень рассматриваемого корневого дерева;
- инвертируем полученный список узлов.

Аналогичные действия выполняем для каждого дерева коллекции корневых деревьев с корнями в узлах единственного невырожденно-го цикла компоненты связности U_L^{kt} . После обхода всех корневых деревьев коллекции помещаем полученные списки в произвольном порядке в итоговый формируемый список $\{t[i], i \in I^k\}$. Затем в список $\{t[i], i \in I^k\}$ помещаем узлы невырожденного цикла, который входит в состав компоненты связности U_L^{kt} в следующем порядке: $j; |p[j]|, |p[|p[j]|]|, \dots, v$, где j — произвольный узел невырожденного цикла, v — узел цикла, для которого выполняется условие: $p[v] = j$. Далее выполняем описанные шаги формирования списка $\{t[i], i \in I^k\}$ для компонент связности $U_L^{kt}, t = 2, \dots, s$.

Сформированный список $\{t[i], i \in I^k\}$ определяет порядок решения уравнений системы (2.2.7).

На рис. 2.12 и в табл. 2.2.5 представлена корневая структура, необходимая для хранения элементов множества U_L^2 , которая позволяет вычислить ненулевые компоненты характеристического вектора $\delta^2(3,4)$ за $O(n)$ операций в наихудшем случае, где $n = |I^2|$. Ненулевыми компонентами характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho)$, порожденного какой-либо дугой $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$, являются:

- компонента $\delta_{\tau\rho}^k$, соответствующие дуге $(\tau, \rho)^k$;
- компоненты, соответствующие дугам цепей, построенных от концов τ и ρ дуги $(\tau, \rho)^k$ в сети $S^k = (I^k, U_L^k \cup (\tau, \rho)^k)$ до узлов циклов;
- компоненты характеристического вектора, соответствующие дугам невырожденного цикла в сети (I^k, U_L^k) .

Коллекция корневых структур для множеств U_L^3, U_L^4, U_L^5 представлена на рис. 2.13–2.14 соответственно.

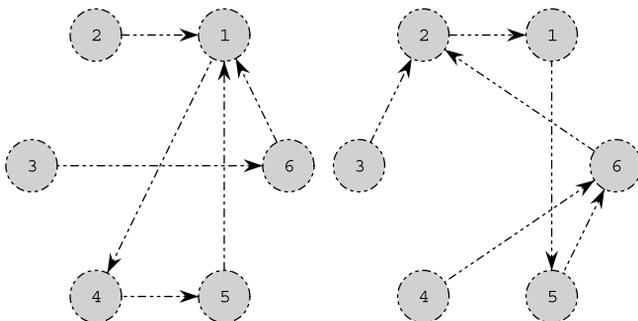


Рис. 2.14. Корневые структуры для множеств U_L^4, U_L^5

Таблица 2.2.5

Корневая структура множества U_L^2

i	1	2	3	4	5	6
$p[i]$	-6	3	1	-1	1	-4
$d[i]$	1	-1	-1	-1	-1	-1
$t[i]$	2	3	5	4	1	6
$depth[i]$	0	2	1	0	1	0

Для рассматриваемого примера (2.1.7) – (2.1.17) матрица D_1 совпадает с матрицей D , поскольку $U^* = \emptyset$.

$$D = D_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_{5,4}^{1,1} & \Lambda_{3,4}^{2,1} \\ \Lambda_{5,4}^{1,2} & -\Lambda_{3,4}^{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1663}{8} & \frac{561}{61} \\ \frac{859}{8} & -\frac{204}{61} \end{pmatrix}.$$

Итак, построена матрица D детерминантов бициклов.

Таблица 2.2.6

**Корневая структура для дуг множества U_L^1 ,
содержащая информацию о родительских дугах**

i	1	2	3	4	5	6
$p[i]$	(1,3)	(2,1)	(3,6)	(3,4)	(6,5)	(4,6)
$t[i]$	2	1	5	3	6	4
$depth[i]$	1	2	0	0	1	0

Вычислим для матрицы детерминантов бициклов D обратную матрицу D^{-1} .

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{32}{2797} & \frac{88}{2797} \\ \frac{52399}{142647} & -\frac{101443}{142647} \end{pmatrix}.$$

Опора $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ обобщенной мультисети $G = (I, U)$ для разреженной системы (2.1.2) — это объединение $S_L^k = \bigcup_t S_L^{k,t}$ связанных компонент $S_L^{k,t} = (I(U_L^{k,t}), U_L^{k,t})$.

Каждая компонента связности $S_L^{k,t} = (I(U_L^{k,t}), U_L^{k,t})$ содержит единственный невырожденный цикл, $U_L^k = \bigcup_t U_L^{k,t}$ и $I^k = \bigcup_t I(U_L^{k,t})$.

В результате добавления дуги $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$, где $k \in K$ фиксировано, к опоре U_L будет получена сеть, которая состоит из компонент связности, единственная из которых является бициклом $B_{\tau\rho}^k = U_L^k \cup (\tau, \rho)^k$. Каждая из остальных компонент связности имеет теоретико-графовые свойства опоры U_L обобщенной мультисети $G = (I, U)$ для разреженной системы (2.1.2), которые описаны выше. При использовании теоретико-графовых свойств опоры U_L и соответствующих структур данных и алгоритмов поиска бицикла в сети ненулевые компоненты каждого характеристического вектора $\delta^k(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^k(\tau, \rho), (i, j)^k \in U^k)$, порожденного дугой $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$ относительно опоры U_L^k , где $k \in K$ фикси-

Таблица 2.2.7

Начальный мультипоток для экстремальной задачи
дробно-линейного программирования (2.1.7) – (2.1.17)

(i,j)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,1)	(2,6)
x_{ij}^1	7				5	
x_{ij}^2	3	1	2	2		
x_{ij}^3	3		6		0	
x_{ij}^4		1	8	6	8	
x_{ij}^5			5		1	2

(i,j)	(3,2)	(3,4)	(3,6)	(4,6)	(5,2)	(5,4)	(6,5)
x_{ij}^1		6	1	8		2	1
x_{ij}^2	4	9		9			
x_{ij}^3				7	4	6	9
x_{ij}^4	7	6	7	7	2	5	
x_{ij}^5	4	9		1			6

ровано, можно вычислить за число операций $O(n)$ в наихудшем случае, где n – число узлов бидикла $B_{\tau\rho}^k = U_L^k \cup (\tau, \rho)^k$.

Для рассматриваемой дробно-линейной экстремальной задачи потокового программирования (2.1.7) – (2.1.17) в табл. 2.2.7 приведен начальный мультипоток $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$.

2.3. Формула приращения целевой функции

Пусть $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ – некоторый мультипоток дробно-линейной экстремальной задачи (2.1.1) – (2.1.6). Компоненты вектора x удовлетворяют ограничениям (2.1.2) – (2.1.6) рассматриваемой задачи (2.1.1) – (2.1.6). Обозначим через X множество мультипотоков дробно-линейной неоднородной задачи (2.1.1) – (2.1.6).

Определим опорный мультипоток $\{x, U_S\}$ как пару, состоящую из произвольного мультипотока $x \in X$ и опоры U_S обобщенной мультисети G дробно-линейной неоднородной задачи потокового программирования (2.1.1) – (2.1.6).

Наряду с мультипотокотом $x \in X$ рассмотрим некоторый мультипоток

$$\bar{x} \in X, \bar{x} = x + \Delta x,$$

$$\Delta x = (\Delta x_{ij}^k : (i, j) \in U, k \in K(i, j)),$$

$$\bar{x} = (\bar{x}_{ij}^k : (i, j) \in U, k \in K(i, j)),$$

$$\bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k + \Delta x_{ij}^k,$$

где $\Delta x = (\Delta x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ — приращение мультипотока x . Компонентами вектора Δx являются приращения Δx_{ij}^k дуговых потоков $x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j)$. Обозначим

$$z_{ij} = \sum_{k \in K_0(i, j)} x_{ij}^k,$$

$$\bar{z}_{ij} = \sum_{k \in K_0(i, j)} \bar{x}_{ij}^k, \quad (2.3.1)$$

$$\Delta z_{ij} = \bar{z}_{ij} - z_{ij} = \sum_{k \in K_0(i, j)} \Delta x_{ij}^k, (i, j) \in U_0.$$

Поскольку \bar{x} — мультипоток дробно-линейной экстремальной задачи (2.1.1) — (2.1.6), то справедливы соотношения (2.3.2) — (2.3.4).

$$\sum_{j \in I_i^+(U^k)} \bar{x}_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U^k)} \mu_{ji}^k \bar{x}_{ji}^k = a_i^k, i \in I^k, k \in K, \quad (2.3.2)$$

$$\sum_{(i, j) \in U} \sum_{k \in K(i, j)} \lambda_{ij}^{kp} \bar{x}_{ij}^k = \alpha_p, p = \overline{1, l}, \quad (2.3.3)$$

$$\sum_{k \in K_0(i, j)} \bar{x}_{ij}^k \leq d_{ij}^0, (i, j) \in U^*. \quad (2.3.4)$$

Вычитая из (2.3.2) – (2.3.3) соответствующие равенства (2.1.2) – (2.1.3) и используя (2.3.1), получим:

$$\sum_{j \in I_i^+(U^k)} \Delta x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U^k)} \mu_{ji}^k \Delta x_{ji}^k = 0, \quad i \in I^k, k \in K, \quad (2.3.5)$$

$$\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} \lambda_{ij}^{kp} \Delta x_{ij}^k = 0, \quad p = \overline{1, l}, \quad (2.3.6)$$

$$\sum_{k \in K_0(i,j)} \Delta x_{ij}^k = \Delta z_{ij}, \quad (i, j) \in U^*. \quad (2.3.7)$$

В соответствии с опорой $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ мультисети G задачи (2.1.1) – (2.1.6), которая включает опору $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$, $U_L^k \subseteq U^k$ обобщенной сети G для системы (2.1.2) и множество бициклических дуг $U_B = \{U_B^k \subseteq U^k \setminus U_L^k, k \in K\}$, $|U_B| = l + |U^*|$, упорядочим компоненты вектора $\Delta x = (\Delta x_{ij}^k, (i, j)^k \in U^k, k \in K)$ следующим образом:

$$\Delta x = (\Delta x_L, \Delta x_B, \Delta x_N),$$

где

$$\Delta x_L = (\Delta x_{ij}^k, (i, j)^k \in U_L^k, k \in K),$$

$$\Delta x_B = (\Delta x_{ij}^k, (i, j)^k \in U_B^k, k \in K),$$

$$\Delta x_N = (\Delta x_{ij}^k, (i, j)^k \in U_N^k, k \in K), \quad U_N^k = U^k \setminus (U_L^k \cup U_B^k).$$

Известно [10, 16], что общее решение разреженной однородной недоопределенной системы (2.3.5) имеет следующий вид:

$$\Delta x_{ij}^k = \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho), \quad (i, j)^k \in U_L^k, k \in K, \quad (2.3.8)$$

где

$$\delta^k(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^k(\tau, \rho), (i, j)^k \in U^k)$$

характеристический вектор, порожденный дугой $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$ относительно опоры U_L^k для разреженной системы (2.1.2), $k \in K$.

Подсчитаем приращение дробно-линейной целевой функции (2.1.1) задачи (2.1.1) – (2.1.6).

$$\begin{aligned}
 \Delta f &= f(\bar{x}) - f(x) = \\
 &= f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{p(x + \Delta x)}{q(x + \Delta x)} - f(x) = \\
 &= \frac{p(x + \Delta x) - f(x)q(x + \Delta x)}{q(x + \Delta x)} = \\
 &= \left[\left(\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k (x_{ij}^k + \Delta x_{ij}^k) + \beta \right) - \right. \\
 &\quad \left. - f(x) \left(\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k (x_{ij}^k + \Delta x_{ij}^k) + \gamma \right) \right] / \\
 &\quad / \left(\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k (x_{ij}^k + \Delta x_{ij}^k) + \gamma \right) = \left(p(x) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k \Delta x_{ij}^k - f(x) \left(q(x) + \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k \Delta x_{ij}^k \right) \right) / \\
 &\quad / \left(\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k (x_{ij}^k + \Delta x_{ij}^k) + \gamma \right).
 \end{aligned}$$

Для полученного приращения дробно-линейной целевой функции и мультипотока x экстремальной задачи (2.1.1) – (2.1.6) учтем соотношение (2.3.9):

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^k + \beta}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k + \gamma}. \quad (2.3.9)$$

Следовательно, формула приращения дробно-линейной целевой функции примет вид

$$\Delta f = \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k \Delta x_{ij}^k - f(x) \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k \Delta x_{ij}^k}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k (x_{ij}^k + \Delta x_{ij}^k) + \gamma}. \quad (2.3.10)$$

2.4. Преобразование числителя

Для выполнения преобразования числителя приращения дробно-линейной целевой функции (2.3.10) первоначально преобразуем в числителе сумму

$$\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k \Delta x_{ij}^k.$$

Для преобразования суммы

$$\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k \Delta x_{ij}^k$$

используем формулу (2.3.8) для приращений Δx_{ij}^k дуговых потоков для дуг множества $(i, j)^k \in U_L^k, k \in K$.

$$\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k \Delta x_{ij}^k = \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U^k} p_{ij}^k \Delta x_{ij}^k =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} p_{ij}^k \Delta x_{ij}^k + \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U^k \setminus U_L^k} p_{ij}^k \Delta x_{ij}^k = \\
 &= \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} p_{ij}^k \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho) + \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} p_{\tau\rho}^k \Delta x_{\tau\rho}^k =
 \end{aligned}$$

[изменим порядок суммирования]

$$= \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \left(p_{\tau\rho}^k + \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} p_{ij}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho) \right) =$$

[выражение в скобках обозначим через $\Delta_P^k(\tau, \rho)$]

$$= \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \Delta_P^k(\tau, \rho).$$

Итак,

$$\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k \Delta x_{ij}^k = \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \Delta_P^k(\tau, \rho), \quad (2.4.1)$$

где

$$\Delta_P^k(\tau, \rho) = p_{\tau\rho}^k + \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} p_{ij}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho). \quad (2.4.2)$$

Используя формулу (2.3.8) для приращений Δx_{ij}^k дуговых потоков для дуг множества $(i, j)^k \in U_L^k, k \in K$, выполним преобразование суммы

$$\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k \Delta x_{ij}^k.$$

Итак,

$$\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k \Delta x_{ij}^k = \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U^k} q_{ij}^k \Delta x_{ij}^k =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} q_{ij}^k \Delta x_{ij}^k + \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U^k \setminus U_L^k} q_{ij}^k \Delta x_{ij}^k = \\
&= \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} q_{ij}^k \sum_{(\tau,\rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau,\rho) + \sum_{k \in K} \sum_{(\tau,\rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} q_{\tau\rho}^k \Delta x_{\tau\rho}^k = \\
&\quad \left[\text{изменим порядок суммирования} \right] \\
&= \sum_{k \in K} \sum_{(\tau,\rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \left(q_{\tau\rho}^k + \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} q_{ij}^k \delta_{ij}^k(\tau,\rho) \right) = \\
&\quad \left[\text{выражение в скобках обозначим через } \Delta_Q^k(\tau,\rho) \right] \\
&= \sum_{k \in K} \sum_{(\tau,\rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \Delta_Q^k(\tau,\rho).
\end{aligned}$$

Итак,

$$\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k \Delta x_{ij}^k = \sum_{k \in K} \sum_{(\tau,\rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \Delta_Q^k(\tau,\rho), \quad (2.4.3)$$

где

$$\Delta_Q^k(\tau,\rho) = q_{\tau\rho}^k + \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} q_{ij}^k \delta_{ij}^k(\tau,\rho). \quad (2.4.4)$$

Так как $\bar{x} = (\bar{x}_{ij}^k : (i,j) \in U, k \in K(i,j))$ — мультипоток, где

$$\bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k + \Delta x_{ij}^k,$$

то для знаменателя $g(\bar{x})$ дробно-линейной целевой функции (2.1.1) на мультипоточе \bar{x} выполнено неравенство

$$g(\bar{x}) = \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k (x_{ij}^k + \Delta x_{ij}^k) + \gamma > 0.$$

Таким образом, знак приращения Δf целевой функции зависит только от знака числителя.

Обозначим через $N_{\Delta f}$ числитель полученного выражения (2.3.10) приращения дробно-линейной целевой функции. Подставим выражения (2.4.1), (2.4.3) в числитель приращения целевой функции (2.3.10):

$$\begin{aligned} N_{\Delta f} &= \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k \Delta x_{ij}^k - f(x) \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k \Delta x_{ij}^k = \\ &= \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \Delta_P^k(\tau, \rho) - f(x) \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \Delta_Q^k(\tau, \rho) = \\ &= \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k (\Delta_P^k(\tau, \rho) - f(x) \Delta_Q^k(\tau, \rho)) = \end{aligned}$$

[выражение в скобках обозначим через $\Delta^k(\tau, \rho)$]

$$= \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \Delta^k(\tau, \rho)$$

Итак, числитель приращения (2.3.10) целевой функции преобразован к виду:

$$\begin{aligned} N_{\Delta f} &= \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k \Delta x_{ij}^k - f(x) \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k \Delta x_{ij}^k = \\ &= \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \Delta^k(\tau, \rho), \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

где

$$\Delta^k(\tau, \rho) = \Delta_P^k(\tau, \rho) - f(x) \Delta_Q^k(\tau, \rho), (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k, k \in K. \quad (2.4.6)$$

Для множества дуг, не входящих в опору U_L обобщенной сети G для разреженной системы (2.1.2), справедливо равенство

$$U^k \setminus U_L^k = U_B^k \cup U_N^k.$$

Выделим в числителе (2.4.5) приращения дробно-линейной целевой функции слагаемые, соответствующие компонентам векторов:

$$\Delta x_B = (\Delta x_{ij}^k, (i, j)^k \in U_B^k, k \in K)$$

и

$$\Delta x_N = (\Delta x_{ij}^k, (i, j)^k \in U_N^k, k \in K), U_N^k = U^k \setminus (U_L^k \cup U_B^k).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} N_{\Delta f} &= \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K} p_{ij}^k \Delta x_{ij}^k - f(x) \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K} q_{ij}^k \Delta x_{ij}^k = \\ &= \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \Delta^k(\tau, \rho) = \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_B^k} \Delta^k(\tau, \rho) \Delta x_{\tau\rho}^k + \\ &\quad + \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_N^k} \Delta^k(\tau, \rho) \Delta x_{\tau\rho}^k. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Для выполнения декомпозиции приращения целевой функции и дальнейших преобразований выражения (2.4.7) подставим в уравнения (2.3.6) общее решение однородной недоопределенной системы (2.3.5), которое имеет вид

$$\Delta x_{ij}^k = \sum_{(\tau, \rho) \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho), (i, j)^k \in U_L^k, k \in K.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U^k} \lambda_{ij}^{kp} \Delta x_{ij}^k &= \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} \lambda_{ij}^{kp} \Delta x_{ij}^k + \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \lambda_{\tau\rho}^{kp} \Delta x_{\tau\rho}^k = \\ &= \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} \lambda_{ij}^{kp} \left[\sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho) \right] + \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \lambda_{\tau\rho}^{kp} \Delta x_{\tau\rho}^k = \\ &= \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \left(\lambda_{\tau\rho}^{kp} + \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} \lambda_{ij}^{kp} \delta_{ij}^k(\tau, \rho) \right) \Delta x_{\tau\rho}^k = 0, \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

где

$$\Lambda_{\tau\rho}^{kp} = \lambda_{\tau\rho}^{kp} + \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} \lambda_{ij}^{kp} \delta_{ij}^k(\tau, \rho), (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k, p = \overline{1, l},$$

число $\Lambda_{\tau\rho}^{kp}$ — детерминант бицикла $B_{\tau\rho}^k$, порожденного дугой $(\tau, \rho)^k$ относительно ограничения (2.3.6) с номером p ; $\delta^k(\tau, \rho)$ — характеристический вектор, $\delta^k(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^k(\tau, \rho), (i, j)^k \in U^k)$, порожденный дугой $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$ относительно опоры U_L^k обобщенной сети G^k .

Итак, уравнения (2.4.8) преобразованы к виду

$$\sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Lambda_{\tau\rho}^{kp} \Delta x_{\tau\rho}^k = 0, p = \overline{1, l}. \quad (2.4.9)$$

В (2.4.9) сгруппируем переменные, соответствующие множеству U_B бициклических дуг. Имеем

$$\sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_B^k} \Lambda_{\tau\rho}^{kp} \Delta x_{\tau\rho}^k = - \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_N^k} \Lambda_{\tau\rho}^{kp} \Delta x_{\tau\rho}^k, p = \overline{1, l}, \quad (2.4.10)$$

$$\Lambda_{\tau\rho}^{kp} = \lambda_{\tau\rho}^{kp} + \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} \lambda_{ij}^{kp} \delta_{ij}^k(\tau, \rho), (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k, k \in K.$$

Аналогично преобразованию системы общего вида (2.3.6) к виду (2.4.10) выполним преобразование разреженной системы (2.3.7) с учетом ее вида разреженности. В уравнения (2.3.7) подставим общее решение однородной недоопределенной системы (2.3.5), которое имеет вид:

$$\Delta x_{ij}^k = \sum_{(\tau, \rho) \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho), (i, j)^k \in U_L^k, k \in K.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K_0(i, j)} \Delta x_{ij}^k &= \sum_{\substack{k \in K_0(i, j), \\ (i, j)^k \in U_L^k}} \Delta x_{ij}^k + \sum_{\substack{k \in K_0(i, j), \\ (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k}} \Delta x_{\tau\rho}^k = \\ &= \sum_{\substack{k \in K_0(i, j), \\ (i, j)^k \in U_L^k}} \left[\sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho) \right] + \sum_{\substack{k \in K_0(i, j), \\ (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k}} \Delta x_{\tau\rho}^k = \\ &= \Delta z_{ij}, \quad (i, j) \in U^*, \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

где

$$\Delta z_{ij} = \sum_{k \in K_0(i, j)} \Delta x_{ij}^k.$$

Изменим порядок суммирования

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k \in K_0(i, j), \\ (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k}} \Delta x_{\tau\rho}^k \left[\sum_{(i, j)^k \in U_L^k} \delta_{ij}^k(\tau, \rho) \right] + \\ & + \sum_{\substack{k \in K_0(i, j), \\ (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k}} \Delta x_{\tau\rho}^k = \Delta z_{ij}, (i, j) \in U^*. \end{aligned}$$

С учетом вида разреженности системы (2.3.7) величина суммы

$$\sum_{(i, j)^k \in B_{\tau\rho}^k} \delta_{ij}^k(\tau, \rho)$$

равна значению $\delta_{ij}(B_{\tau\rho}^k)$ для каждой мультидуги $(i, j) \in U_0$, где

$$\delta_{ij}(B_{\tau\rho}^k) = \begin{cases} \delta_{ij}^k(\tau, \rho), & k \in K_0(i, j), \\ 0, & k \notin K_0(i, j), \end{cases}$$

$$(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k, k \in K.$$

Итак, уравнения (2.3.7) примут вид

$$\sum_{k \in K_0(i, j)} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \delta_{ij}(B_{\tau\rho}^k) \Delta x_{\tau\rho}^k = \Delta z_{ij}, (i, j) \in U^*, \quad (2.4.12)$$

или

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in K_0(i, j)} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_B^k} \delta_{ij}(B_{\tau\rho}^k) \Delta x_{\tau\rho}^k = \\ & = \Delta z_{ij} - \sum_{k \in K_0(i, j)} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_N^k} \delta_{ij}(B_{\tau\rho}^k) \Delta x_{\tau\rho}^k, (i, j) \in U^*. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Таким образом, система линейных уравнений (2.3.6) – (2.3.7) преобразована к виду (2.4.10), (2.4.13).

Представим систему линейных алгебраических уравнений (2.4.10), (2.4.13) в матрично-векторной форме

$$D \Delta x_B = \tilde{\beta}. \quad (2.4.14)$$

Вектор $\tilde{\beta}$ имеет вид

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_p, & p = \overline{1, l}, \\ \tilde{\beta}_{l+\xi(i,j)}, & (i, j) \in U^* \end{pmatrix},$$

Компоненты вектора $\tilde{\beta}$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_p &= - \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_N^k} \Lambda_{\tau\rho}^{kp} \Delta x_{\tau\rho}^k, \quad p = \overline{1, l}, \\ \tilde{\beta}_{l+\xi(i,j)} &= \Delta z_{ij} - \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

$$- \sum_{k \in K_0(i,j)} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_N^k} \delta_{ij}(B_{\tau\rho}^k) \Delta x_{\tau\rho}^k, \quad (i, j) \in U^*,$$

Вектор-столбец Δx_B состоит из элементов

$$\Delta x_{ij}^k, \quad (i, j)^k \in U_B^k, \quad k \in K.$$

Матрица D состоит из блоков D_1 и D_2 ,

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = (\Lambda_{\tau\rho}^{kp}, p = \overline{1, l}, t(\tau, \rho)^k = \overline{1, |U_B|}),$$

$$D_2 = (\delta_{ij}(B_{\tau\rho}^k), \xi(i, j) = \overline{1, |U^*|}, t(\tau, \rho)^k = \overline{1, |U_B|}),$$

$\xi = \xi(i, j)$ – номер дуги $(i, j) \in U^*$, $\xi \in \{1, 2, \dots, |U^*|\}$; $\Lambda_{\tau\rho}^{kp}$ – детерминант бицикла $B_{\tau\rho}^k$, который порожден дугой $(\tau, \rho)^k$ относительно ограничения (2.1.3) с номером p .

Поскольку $D = D(U_S)$ — матрица детерминантов бициклов, соответствующая опоре $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$, то $\det D \neq 0$. Следовательно, приращения дуговых потоков для бициклических дуг равны

$$\Delta x_B = D^{-1} \tilde{\beta}. \quad (2.4.16)$$

Представим (2.4.16) в компонентной форме. Обозначим

$$D^{-1} = (\nu_{zq} : z = \overline{1, \bar{t}}, q = \overline{1, \bar{t}}), \quad \tilde{t} = \sum_{k \in K} |U_B^k|.$$

Итак, система (2.4.16) представима в виде

$$\Delta x_{\tau\rho}^k = \sum_{p=1}^l \nu_{t(\tau, \rho)^k, p} \tilde{\beta}_p + \sum_{(i, j) \in U^*} \nu_{t(\tau, \rho)^k, l + \xi(i, j)} \tilde{\beta}_{l + \xi(i, j)}, \quad (2.4.17)$$

где $(\tau, \rho)^k \in U_B^k, k \in K$.

Компоненты вектора $\tilde{\beta}$, где

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_p, & p = \overline{1, \bar{l}}, \\ \tilde{\beta}_{l + \xi(i, j)}, & (i, j) \in U^*, \end{pmatrix},$$

вычисляются согласно (2.4.15).

Итак, вычислены приращения дуговых потоков (2.4.17) для бициклических дуг. Подставим (2.4.17) в числитель (2.4.7) приращения дробно-линейной целевой функции:

$$\begin{aligned} & \sum_{(i, j) \in U} \sum_{k \in K(i, j)} p_{ij}^k \Delta x_{ij}^k - f(x) \sum_{(i, j) \in U} \sum_{k \in K(i, j)} q_{ij}^k \Delta x_{ij}^k = \\ & = \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta x_{\tau\rho}^k \Delta^k(\tau, \rho) = \\ & = \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_B^k} \Delta^k(\tau, \rho) \Delta x_{\tau\rho}^k + \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_N^k} \Delta^k(\tau, \rho) \Delta x_{\tau\rho}^k = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_B^k} \Delta^k(\tau, \rho) \times \\
 &\times \left(\sum_{p=1}^l \nu_{t(\tau, \rho)^k, p} \tilde{\beta}_p + \sum_{(i, j) \in U^*} \nu_{t(\tau, \rho)^k, l + \xi(i, j)} \tilde{\beta}_{l + \xi(i, j)} \right) + \\
 &+ \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_N^k} \Delta^k(\tau, \rho) \Delta x_{\tau \rho}^k. \tag{2.4.18}
 \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$r_p = \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_B^k} \Delta^k(\tau, \rho) \nu_{t(\tau, \rho)^k, p}, \quad p = \overline{1, l};$$

$$r_{ij} = \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_B^k} \Delta^k(\tau, \rho) \nu_{t(\tau, \rho)^k, l + \xi(i, j)}, \quad (i, j) \in U^*.$$

Компоненты вектора $\tilde{\beta}$ вычисляются согласно (2.4.15). Подставим (2.4.15) в числитель $N_{\Delta f}$ приращения целевой функции (2.4.18).

С учетом введенных обозначений числитель $N_{\Delta f}$ приращения целевой функции Δf преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 N_{\Delta f} &= \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_N^k} \Delta x_{\tau \rho}^k \times \\
 &\times \left(\Delta^k(\tau, \rho) - \sum_{p=1}^l r_p \Lambda_{\tau \rho}^{kp} - \sum_{(i, j) \in U^*} r_{ij} \delta_{ij}(B_{\tau \rho}^k) \right) + \\
 &+ \sum_{(i, j) \in U^*} r_{ij} \Delta z_{ij}. \tag{2.4.19}
 \end{aligned}$$

Обозначим выражение в скобках в (2.4.19) через $\bar{\Delta}^k(\tau, \rho)$. Окончательно числитель $N_{\Delta f}$ приращения целевой функции Δf примет вид:

$$N_{\Delta f} = \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_N^k} \bar{\Delta}^k(\tau, \rho) \Delta x_{\tau \rho}^k + \sum_{(i, j) \in U^*} r_{ij} \Delta z_{ij}, \tag{2.4.20}$$

где

$$\bar{\Delta}^k(\tau, \rho) = \Delta^k(\tau, \rho) - \sum_{p=1}^l r_p \Lambda_{\tau \rho}^{kp} - \sum_{(i, j) \in U^*} r_{ij} \delta_{ij}(B_{\tau \rho}^k). \tag{2.4.21}$$

2.5. Преобразование знаменателя

Для выполнения преобразования знаменателя приращения дробно-линейной целевой функции (2.3.10) необходимо найти общее решение системы (2.1.2).

Теорема 2.5.1. *Общее решение системы (2.1.2) для фиксированного $k \in K$ может быть представлено в следующем виде:*

$$x_{ij}^k = \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} x_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho) + \left(\tilde{x}_{ij}^k - \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \tilde{x}_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho) \right), \quad (2.5.1)$$

$$(i, j)^k \in U_L^k; \quad x_{\tau\rho}^k \in \mathbf{R}, \quad (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k,$$

где $\tilde{x}^k = (\tilde{x}_{ij}^k, (i, j)^k \in U^k)$ – любое частное решение системы (2.1.2) для фиксированного $k \in K$; $x_{\tau\rho}^k$ – независимые переменные, соответствующие дугам $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$.

Доказательство теоремы приведено в [41].

Замечание 2.5.1. На практике при построении частного решения $\tilde{x}^k = (\tilde{x}_{ij}^k, (i, j)^k \in U^k)$ системы ((2.1.2) будем полагать $\tilde{x}_{\tau\rho}^k = 0$ для дуг $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$. Тогда система (2.1.2) для нахождения частного решения \tilde{x}^k представима в виде:

$$\sum_{j \in I_i^+(U_L^k)} \tilde{x}_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U_L^k)} \mu_{ji}^k \tilde{x}_{ji}^k = a_i^k, \quad i \in I^k, k \in K.$$

В этом случае формула (2.5.1) имеет вид

$$x_{ij}^k = \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} x_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho) + \tilde{x}_{ij}^k, \quad (i, j)^k \in U_L^k, \quad (2.5.2)$$

$$x_{\tau\rho}^k \in \mathbf{R}, \quad (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k.$$

Выполним преобразование знаменателя приращения целевой функции (2.3.10). Для этого подставим общее решение системы (2.1.2), которое имеет вид (2.5.1), в знаменатель целевой функции (2.3.10).

Для преобразования суммы

$$\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k$$

применим формулу (2.5.1) вычисления дуговых потоков для дуг множества $(i,j)^k \in U_L^k$, $k \in K$

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k &= \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U^k} q_{ij}^k x_{ij}^k = \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} q_{ij}^k x_{ij}^k + \\ &+ \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U^k \setminus U_L^k} q_{ij}^k x_{ij}^k = \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} q_{ij}^k \times \\ &\times \left[\sum_{(\tau,\rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} x_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau,\rho) + \left(\tilde{x}_{ij}^k - \sum_{(\tau,\rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \tilde{x}_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau,\rho) \right) \right] \\ &+ \sum_{k \in K} \sum_{(\tau,\rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} q_{\tau\rho}^k x_{\tau\rho}^k = \end{aligned}$$

[изменим порядок суммирования]

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \in K} \sum_{(\tau,\rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} x_{\tau\rho}^k \left(q_{\tau\rho}^k + \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} q_{ij}^k \delta_{ij}^k(\tau,\rho) \right) + \\ &+ \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} q_{ij}^k \left[\tilde{x}_{ij}^k - \sum_{(\tau,\rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \tilde{x}_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau,\rho) \right]. \end{aligned}$$

Обозначим

$$Q = \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} q_{ij}^k \left[\tilde{x}_{ij}^k - \sum_{(\tau,\rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \tilde{x}_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau,\rho) \right]$$

и используем выражения (2.4.4).

В результате сумма $\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k$ преобразована к виду

$$\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k = \sum_{k \in K} \sum_{(\tau,\rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta_Q^k(\tau,\rho) x_{\tau\rho}^k + Q, \quad (2.5.3)$$

где

$$\Delta_Q^k(\tau, \rho) = q_{\tau\rho}^k + \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} q_{ij}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho),$$

$$Q = \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} q_{ij}^k \left(\bar{x}_{ij}^k - \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \bar{x}_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho) \right). \quad (2.5.4)$$

Подставим в знаменатель приращения целевой функции полученные выражения (2.4.3), (2.5.4). В результате знаменатель приращения целевой функции имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k (x_{ij}^k + \Delta x_{ij}^k) + \gamma = \\ & = \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta_Q^k(\tau, \rho) x_{\tau\rho}^k + \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta_Q^k(\tau, \rho) \Delta x_{\tau\rho}^k + Q + \gamma = \\ & = \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta_Q^k(\tau, \rho) (x_{\tau\rho}^k + \Delta x_{\tau\rho}^k) + Q + \gamma. \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Окончательно с учетом выражения (2.4.20) для числителя и (2.5.5) для знаменателя формула приращения целевой функции примет вид

$$\Delta f = \frac{\sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_N^k} \bar{\Delta}^k(\tau, \rho) \Delta x_{\tau\rho}^k + \sum_{(i,j) \in U^*} r_{ij} \Delta z_{ij}}{\sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta_Q^k(\tau, \rho) (x_{\tau\rho}^k + \Delta x_{\tau\rho}^k) + Q + \gamma}, \quad (2.5.6)$$

где Δz_{ij} определяется формулой (2.3.1),

$$\bar{\Delta}^k(\tau, \rho) = \Delta^k(\tau, \rho) - \sum_{p=1}^l r_p \Lambda_{\tau\rho}^{kp} - \sum_{(i,j) \in U^*} r_{ij} \delta_{ij}(B_{\tau\rho}^k). \quad (2.5.7)$$

Формулы для вычисления выражения $\Delta^k(\tau, \rho)$, которое содержится в (2.5.7), имеют следующий вид:

$$\Delta^k(\tau, \rho) = \Delta_P^k(\tau, \rho) - f(x) \Delta_Q^k(\tau, \rho). \quad (2.5.8)$$

Вычисление выражений $\Delta_P^k(\tau, \rho)$ и $\Delta_Q^k(\tau, \rho)$, входящих в (2.5.8), выполняется следующим образом:

$$\Delta_P^k(\tau, \rho) = p_{\tau\rho}^k + \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} p_{ij}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho),$$

$$\Delta_Q^k(\tau, \rho) = q_{\tau\rho}^k + \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} q_{ij}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho).$$

$$\gamma_{ij} = r_{ij}, (i, j) \in U^*,$$

Определение 2.5.1. Числа $\bar{\Delta}^k(\tau, \rho)$, $(\tau, \rho)^k \in U_N^k$, $k \in K$, которые вычисляются согласно (2.5.7), назовем оценками.

2.6. Система потенциалов

Приведем алгоритм вычисления оценок (2.5.7), основанный на системе уравнений для потенциалов.

Пусть $\{x, U_S\}$ — некоторый опорный мультипоток. В соответствии с опорой $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$, где $U_S^k \subset U^k$, построим векторы потенциалов r и u^k , $k \in K$:

$$r = (r_p : p = \overline{1, l}; \gamma_{ij}, (i, j) \in U^*),$$

$$u^k = (u_i^k, i \in I^k), k \in K.$$

Согласно общей теории оптимизации [1] компоненты векторов r и u^k , $k \in K$ вычисляются из системы (2.6.1) — (2.6.3).

$$u_i^k - \mu_{ij}^k u_j^k + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^{kp} r_p = -(p_{ij}^k - f(x)q_{ij}^k), \quad (2.6.1)$$

$$(i, j) \in U \setminus U^*, k \in K_S(i, j);$$

$$u_i^k - \mu_{ij}^k u_j^k + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^{kp} r_p + \gamma_{ij} = -(p_{ij}^k - f(x)q_{ij}^k), \quad (2.6.2)$$

$$(i, j) \in U^*, k \in K_S^0(i, j);$$

$$u_i^k - \mu_{ij}^k u_j^k + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^{kp} r_p = - (p_{ij}^k - f(x) q_{ij}^k), \quad (2.6.3)$$

$$(i, j) \in U \setminus U^*, k \in K_S(i, j), (i, j) \in U^*, k \in K_S(i, j) \setminus K_S^0(i, j).$$

Построим эффективный алгоритм решения системы (2.6.1) – (2.6.3), который основан на принципах декомпозиции опоры U_S ,

$$U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}, U_S^k \subset U^k, k \in K$$

обобщенной мультисети $G = (I, U)$ задачи (2.1.1) – (2.1.6) и применении теоретико-графовых свойств опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.2). Для этого сформируем вектор-столбец ω , состоящий из чисел $\omega_t, t = \overline{1, \bar{t}}$, где \bar{t} – количество фундаментальных бициклов, порожденных дугами множества $U_B = \{U_B^k, k \in K\}$ [6, 10, 17]. Компоненты вектора ω вычисляются следующим образом:

$$\omega_t = - \sum_{(i, j)^k \in B_{\tau\rho}^k} (p_{ij}^k - f(x) q_{ij}^k) \delta_{ij}^k(\tau, \rho), t = t(\tau, \rho)^k, k \in K.$$

Также составим вектор-столбец r из потенциалов $r_p, p = \overline{1, \bar{l}}$; $\gamma_{ij}, (i, j) \in U^*$, который удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$D' r = \omega, \quad (2.6.4)$$

Система (2.6.4) имеет единственное решение, поскольку $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}, U_S^k \subset U^k, k \in K$ – опора обобщенной мультисети $G = (I, U)$ задачи (2.1.1) – (2.1.6) и, следовательно, по теореме 2.2.1 (сетевой критерий опорности обобщенной мультисети G задачи (2.1.1) – (2.1.6)) выполняется условие

$$R(U_S) \neq 0.$$

Подставим компоненты вектора r , вычисленные из системы (2.6.4), в разреженную систему линейных уравнений (2.6.1) – (2.6.3). В результате имеем разреженную систему линейных уравнений, в которой неизвестными являются компоненты векторов

$$u^k = (u_i^k : i \in I^k), k \in K.$$

После подстановки компонент компонент вектора r , вычисленных из системы (2.6.4), в систему (2.6.1) – (2.6.3) получим разреженную линейную систему, состоящую из $|K|$ независимых подсистем. Итак, система (2.6.1) – (2.6.3) преобразована к виду (2.6.5) – (2.6.7).

$$u_i^k - \mu_{ij}^k u_j^k = - \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^{kp} r_p - (p_{ij}^k - f(x)q_{ij}^k), \quad (2.6.5)$$

$$(i, j) \in U \setminus U^*, k \in K_S(i, j), (i, j)^k \in U_L^k;$$

$$u_i^k - \mu_{ij}^k u_j^k = - \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^{kp} r_p - \gamma_{ij} - (p_{ij}^k - f(x)q_{ij}^k), \quad (2.6.6)$$

$$(i, j) \in U^*, k \in K_S^0(i, j), (i, j)^k \in U_L^k;$$

$$u_i^k - \mu_{ij}^k u_j^k = - \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^{kp} r_p - (p_{ij}^k - f(x)q_{ij}^k), \quad (2.6.7)$$

$$(i, j) \in U^*, k \in K_S(i, j) \setminus K_S^0(i, j), (i, j)^k \in U_L^k.$$

Укажем алгоритм решения каждой из $|K|$ независимых подсистем вида (2.6.5) – (2.6.7) за время, пропорциональное $|I^k|$ в наихудшем случае, где $|I^k|$ – число узлов обобщенной сети $G^k = (I^k, U^k)$ для k -го типа потока, $k \in K$.

Итак, рассмотрим алгоритм решения системы (2.6.5) – (2.6.7) для фиксированного $k \in K$ с учетом типа разреженности и теоретико-графовых свойств опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$, $U_L^k \subseteq U^k$ обобщенной сети G для разреженной системы вида (2.1.2).

Для фиксированного типа потока $k \in K$ система (2.6.5) – (2.6.7) для компонент вектора потенциалов u_i^k , соответствующих узлам невырожденного цикла, образует систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) специального вида [5]. Для построения решения уравнений системы для узлов невырожденного цикла некоторой компоненты связности необходимо выполнить три обхода цикла, применяя корневые структуры [16] для хранения соответствующей компоненты связности. Обход цикла начинаем с любого узла i . При первом обходе цикла полагаем потенциал узла i равным произвольному значению, например единице: $u_i^k = 1$. Последовательно осуществляем движение по узлам

невыврожденного цикла, вычисляя потенциалы узлов. Находим первую невязку (см. секцию 1.1). При втором обходе цикла полагаем потенциал узла i равным произвольному значению, отличному от начального значения потенциала $u_i^k = 1$ при первом обходе цикла, например нулю: $u_i^k = 0$. Последовательно осуществляя движение по узлам невырожденного цикла, вычисляем потенциалы узлов и находим вторую невязку [5, 16]. Затем по формуле (1.1.8) вычислим реальное значение потенциала u_i^k узла i . При третьем обходе цикла вычисляем искомые значения потенциалов остальных узлов невырожденного цикла. После вычисления потенциалов, соответствующих узлам невырожденного цикла, для каждого узла j цикла выполним рекуррентное движение по всем инцидентным дугам $(j, m_t), t = \overline{1, l_1}$ для нахождения узлов $m_t, t = \overline{1, l_1}$ (не имеют вычисленных потенциалов), и рекуррентное движение по всем инцидентным дугам $(n_p, j), p = \overline{1, l_2}$ для нахождения узлов $n_p, p = \overline{1, l_2}$ (не имеют вычисленных потенциалов). Вычислить потенциалы указанных узлов и продолжить описанный процесс для узлов $m_t, t = \overline{1, l_1}$ и $n_p, p = \overline{1, l_2}$ и т. д. до тех пор, пока не будут вычислены потенциалы $u_i^k, i \in I^k$ всех узлов рассматриваемой компоненты связности опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.2) при фиксированном $k \in K$.

2.7. Пример вычисления потенциалов и оценок

Для рассматриваемого примера (2.1.7) – (2.1.17) опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ включает опору $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12) и множество бициклических дуг $U_B = \{(5,4)^1, (3,4)^2\}$. Опора $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12) представлена на рис. 2.7–2.10. Напомним, что единственный цикл каждой компоненты связности опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ является невырожденным.

Также в состав опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ включены бициклические дуги $U_B = \{(5,4)^1, (3,4)^2\}$. Множество U^* не содержит мультидуг: $U^* = \emptyset$. Характеристики опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ представлены в табл. 2.2.3.

Пронумеруем дуги множества U_B следующим образом:

$$t(5,4)^1 = 1, \quad t(3,4)^2 = 2.$$

Бициклические дуги $U_B = \{(5,4)^1, (3,4)^2\}$ порождают два бицик-

ла $B_{5,4}^1, B_{3,4}^2$. Ненулевые компоненты характеристических векторов $\delta^1(5,4) = (\delta_{ij}^1(5,4), (i,j)^1 \in U^1)$ и $\delta^2(3,4) = (\delta_{ij}^2(3,4), (i,j)^2 \in U^2)$, порожденных дугами $(5,4)^1, (3,4)^2$ представлены в табл. 2.7.1 и 2.7.2.

Таблица 2.7.1

Ненулевые компоненты вектора $\delta^1(5,4)$

(i,j)	(3,4)	(3,6)	(4,6)	(5,4)	(6,5)
$\delta^1(5,4)$	$\frac{115}{4}$	$-\frac{115}{4}$	$\frac{215}{8}$	1	5

Таблица 2.7.2

Ненулевые компоненты вектора $\delta^2(3,4)$

(i,j)	(1,3)	(1,4)	(1,6)	(3,4)	(4,6)
$\delta^2(3,4)$	5	$-\frac{341}{61}$	$\frac{36}{61}$	1	$-\frac{28}{61}$

Для выбранной опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ (см. табл. 2.2.3) обобщенной мультисети G для экстремальной задачи дробно-линейного программирования (2.1.7) – (2.1.17) рассмотрим алгоритм вычисления потенциалов $r_p, p = \bar{1}, \bar{l}$ и

$$u_i^k, i \in I^k, k \in K.$$

Вычислим матрицу D .

$$D = \begin{pmatrix} \Lambda_{5,4}^{1,1} & \Lambda_{3,4}^{2,1} \\ \Lambda_{5,4}^{1,2} & \Lambda_{3,4}^{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1663}{8} & \frac{561}{61} \\ \frac{859}{8} & \frac{204}{61} \end{pmatrix}.$$

Сформируем для матрицы D транспонированную матрицу D' .

$$D' = \begin{pmatrix} \frac{1663}{8} & \frac{859}{8} \\ \frac{561}{61} & \frac{204}{61} \end{pmatrix}.$$

Построим вектор $\omega = (\omega_t, t = \overline{1, \tilde{t}})$ – правую часть системы (2.6.4). Бициклические дуги $U_B = \{(5,4)^1, (3,4)^2\}$ порождают два бицикла $B_{5,4}^1, B_{3,4}^2$, следовательно, $\tilde{t} = 2$, где \tilde{t} – количество фундаментальных бициклов, порожденных дугами множества $U_B = \{U_B^k, k \in K\}$. Компоненты вектора ω вычисляются следующим образом:

$$\omega_t = - \sum_{(i,j)^k \in B_{\tau\rho}^k} (p_{ij}^k - f(x)q_{ij}^k) \delta_{ij}^k(\tau, \rho), t = t(\tau, \rho)^k, k \in K,$$

$$t = \overline{1, \tilde{t}}.$$

Для выбранной опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ (см. табл. 2.2.3) обобщенной мультисети G для рассматриваемой экстремальной задачи дробно-линейного программирования (2.1.7) – (2.1.17) вектор ω состоит из двух компонент ω_1 и ω_2 . Компонента ω_1 вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= - \sum_{(i,j)^k \in B_{5,4}^1} (p_{ij}^1 - f(x)q_{ij}^1) \delta_{ij}^1(5,4) = \\ &= - \left(\left(9 - \frac{256}{889} 19 \right) \frac{115}{4} + \left(6 - \frac{256}{889} 23 \right) \left(-\frac{115}{4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(7 - \frac{256}{889} 25 \right) \frac{215}{8} + \left(9 - \frac{256}{889} 32 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(8 - \frac{256}{889} 35 \right) 5 \right) = \frac{105061}{1016}. \end{aligned}$$

Значение компоненты ω_2 вектора ω вычисляется следующим образом:

$$\omega_2 = - \sum_{(i,j)^k \in B_{3,4}^2} (p_{ij}^2 - f(x)q_{ij}^2) \delta_{ij}^2(3,4) =$$

$$\begin{aligned}
&= - \left(\left(10 - \frac{256}{889} 2 \right) 5 + \left(10 - \frac{256}{889} 3 \right) \left(-\frac{341}{61} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(6 - \frac{256}{889} 9 \right) \frac{36}{61} + \left(6 - \frac{256}{889} 26 \right) \left(-\frac{28}{61} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(2 - \frac{256}{889} 20 \right) \right) = -\frac{272078}{54229}.
\end{aligned}$$

Представим систему вида (2.6.4) для выбранной опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ (см. табл. 2.2.3) обобщенной мультисети G для рассматриваемой экстремальной задачи дробно-линейного программирования (2.1.7) – (2.1.17).

$$\begin{pmatrix} \frac{1663}{8} & \frac{859}{8} \\ \frac{561}{61} & \frac{204}{61} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{105061}{1016} \\ -\frac{272078}{54229} \end{pmatrix}, \quad (2.7.1)$$

где

$$D' = \begin{pmatrix} \Lambda_{5,4}^{1,1} & \Lambda_{5,4}^{1,2} \\ \Lambda_{3,4}^{2,1} & \Lambda_{3,4}^{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1663}{8} & \frac{859}{8} \\ \frac{561}{61} & \frac{204}{61} \end{pmatrix},$$

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{105061}{1016} \\ -\frac{272078}{54229} \end{pmatrix}.$$

Система (2.7.1) имеет единственное решение, поскольку $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ (см. табл. 2.2.3) – опора обобщенной мультисети G для экстремальной задачи дробно-линейного программирования (2.1.7) – (2.1.17) и, следовательно, по теореме 2.2.1 выполняется условие

$$R(U_S) = \det D' = \det \begin{pmatrix} \frac{1663}{8} & \frac{859}{8} \\ \frac{561}{61} & \frac{204}{61} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Из системы (2.7.1) вычислим компоненты вектора r :

$$r_1 = \frac{383742110}{126813183}, \quad r_2 = -\frac{865040261}{126813183}.$$

Подставим вычисленные компоненты вектора r в систему для потенциалов (2.6.1) – (2.6.3) для рассматриваемой экстремальной задачи дробно-линейного программирования (2.1.7) – (2.1.17) при выбранной опоре $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ (см. табл. 2.2.3) обобщенной мультисети G . Представим систему вида (2.6.5) – (2.6.7) для каждого типа потока. Уравнения системы (2.6.5) – (2.6.7) для потока первого типа имеют вид

$$\begin{aligned} u_2^1 - \frac{7}{10}u_1^1 &= -9 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - 6 \left(\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(6 - \frac{256}{889}11 \right), \\ u_1^1 - \frac{4}{5}u_3^1 &= -7 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - \left(\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(9 - \frac{256}{889} \right), \\ u_3^1 - \frac{9}{10}u_4^1 &= -2 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - \left(9 - \frac{256}{889}19 \right), \\ u_3^1 - \frac{1}{5}u_6^1 &= -6 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(6 - \frac{256}{889}23 \right), \end{aligned} \tag{2.7.2}$$

$$u_4^1 - \frac{2}{5}u_6^1 = -5 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - 9 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(7 - \frac{256}{889}25 \right),$$

$$u_6^1 - \frac{1}{5}u_5^1 = -3 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - 6 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(8 - \frac{256}{889}35 \right).$$

Применение теоретико-графовых свойств опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.7.2) (множество дуг первого типа потока (см. рис. 2.15)) позволяет решить линейную систему (2.7.2) без использования ее матричной формы. С этой целью используется технология представления опоры U_L^1 (см. рис. 2.7) в виде корневой структуры (см. рис. 2.11 и табл. 2.2.4), которая позволяет вычислить компоненты вектора

$$u^1 = (u_1^1, u_2^1, u_3^1, u_4^1, u_5^1, u_6^1)$$

за $O(n)$ операций в наихудшем случае, где $n = |I^1|$. Итак, вычислим за

$O(n)$ операций в наихудшем случае компоненты вектора u^1 — решение системы (2.7.2).

$$u_1^1 = \frac{2470984456}{126813183}, \quad u_2^1 = \frac{15535332746}{634065915},$$

$$u_3^1 = \frac{6746174975}{126813183}, \quad u_4^1 = \frac{2948571420}{42271061},$$

$$u_5^1 = \frac{15409539815}{126813183}, \quad u_6^1 = \frac{7384534855}{126813183}.$$

Уравнения системы (2.6.5) — (2.6.7) для потока второго типа имеют вид (2.7.3)

$$u_3^2 - \frac{2}{5}u_2^2 = -9 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) -$$

$$- 3 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(5 - \frac{256}{889}16 \right),$$

$$u_1^2 - \frac{1}{5}u_3^2 = -5 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) -$$

$$- 9 \left(\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(10 - \frac{256}{889}2 \right),$$

$$\begin{aligned}
& u_1^2 - \frac{1}{10}u_4^2 = -4 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - \\
& - 8 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(10 - \frac{256}{889}3 \right), \\
& u_1^2 - \frac{1}{10}u_5^2 = - \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - \\
& - 6 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(10 - \frac{256}{889}5 \right), \\
& u_1^2 - \frac{7}{10}u_6^2 = -3 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - \tag{2.7.3} \\
& - 4 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(6 - \frac{256}{889}9 \right), \\
& u_4^2 - \frac{9}{10}u_6^2 = -7 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - \\
& - 5 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(6 - \frac{256}{889}26 \right).
\end{aligned}$$

Применим технологию представления опоры U_L^2 (см. рис. 2.8) в виде корневой структуры (см. рис. 2.12 и табл. 2.2.5) и вычислим за $O(n)$ операций в наихудшем случае, $n = |I^2|$, компоненты вектора u^2 — решение системы (2.7.3). Итак, имеем решение системы (2.7.3):

$$\begin{aligned}
u_1^2 &= \frac{4783227907}{126813183}, \quad u_2^2 = \frac{523823350}{18116169}, \\
u_3^2 &= \frac{558363370}{126813183}, \quad u_4^2 = \frac{5564531930}{126813183},
\end{aligned}$$

$$u_5^2 = \frac{3540907070}{42271061}, \quad u_6^2 = \frac{4152162290}{126813183}.$$

Уравнения системы (2.6.5) – (2.6.7) для потока третьего типа имеют вид (2.7.4)

$$\begin{aligned} u_1^3 - u_3^3 &= -3 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - \\ &- 9 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(6 - \frac{256}{889} 2 \right), \\ u_1^3 - \frac{1}{5} u_5^3 &= - \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - \\ &- 8 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(4 - \frac{256}{889} 6 \right), \\ u_2^3 - \frac{3}{5} u_1^3 &= -6 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - \\ &- 2 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(8 - \frac{256}{889} 12 \right), \\ u_5^3 - \frac{7}{10} u_2^3 &= -2 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - \\ &- 2 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(4 - \frac{256}{889} 30 \right), \\ u_5^3 - \frac{2}{5} u_4^3 &= -9 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - \\ &- \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(10 - \frac{256}{889} 33 \right), \end{aligned} \tag{2.7.4}$$

$$u_6^3 - \frac{4}{5}u_5^3 = -4 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) -$$

$$-7 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(1 - \frac{256}{889}36 \right).$$

С применением технологии представления опоры U_L^3 (см. рис. 2.9) в виде корневой структуры, которая изображена на рис. 2.13, вычислим компоненты вектора u^3 — решение системы (2.7.4) за $O(n)$ операций в наилучшем случае, $n = |I^3|$. Итак, имеем вектор

$$u^3 = (u_1^3, u_2^3, u_3^3, u_4^3, u_5^3, u_6^3),$$

$$u_1^3 = \frac{1599448575370}{29040218907}, \quad u_2^3 = \frac{696624627100}{29040218907},$$

$$u_3^3 = \frac{13985156765}{1708248171}, \quad u_4^3 = \frac{7250118806635}{58080437814},$$

$$u_5^3 = \frac{842787048340}{29040218907}, \quad u_6^3 = \frac{1981392543596}{29040218907}.$$

Уравнения системы (2.6.5) — (2.6.7) для потока четвертого типа имеют вид (2.7.5)

$$u_1^4 - \frac{1}{5}u_4^4 = -3 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(6 - \frac{256}{889}4 \right),$$

$$u_1^4 - \frac{9}{10}u_5^4 = -7 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) -$$

$$-6 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(3 - \frac{256}{889}7 \right),$$

$$\begin{aligned}
u_1^4 - \frac{4}{5}u_6^4 &= -\left(\frac{383742110}{126813183}\right) - \\
&- 4\left(-\frac{865040261}{126813183}\right) - \left(6 - \frac{256}{889}10\right), \\
u_2^4 - \frac{4}{5}u_1^4 &= -2\left(\frac{383742110}{126813183}\right) - \\
&- 9\left(-\frac{865040261}{126813183}\right) - \left(10 - \frac{256}{889}13\right), \\
u_3^4 - \frac{7}{10}u_6^4 &= -9\left(\frac{383742110}{126813183}\right) - \\
&- 5\left(-\frac{865040261}{126813183}\right) - \left(3 - \frac{256}{889}24\right), \\
u_5^4 - \frac{7}{10}u_4^4 &= -6\left(\frac{383742110}{126813183}\right) - \\
&- 2\left(-\frac{865040261}{126813183}\right) - \left(1 - \frac{256}{889}34\right).
\end{aligned} \tag{2.7.5}$$

С применением технологии представления опоры U_L^4 (см. рис. 2.9) в виде корневой структуры (см. рис. 2.14) вычислим компоненты вектора u^4 — решение системы (2.7.5) за $O(n)$ операций в наилучшем случае, $n = |I^4|$. Итак, построен вектор

$$u^4 = (u_1^4, u_2^4, u_3^4, u_4^4, u_5^4, u_6^4),$$

где

$$u_1^4 = \frac{1567711651}{126813183}, \quad u_2^4 = \frac{37393224179}{634065915},$$

$$u_3^4 = \frac{1049671979}{338168488}, \quad u_4^4 = -\frac{2063002810}{126813183},$$

$$u_5^4 = -\frac{300562600}{42271061}, \quad u_6^4 = -\frac{43819075}{3994116}.$$

Уравнения системы (2.6.5) – (2.6.7) для потока пятого типа имеют вид (2.7.6)

$$\begin{aligned} u_1^5 - \frac{2}{5}u_5^5 &= -6 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - \\ &- \left(\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(3 - \frac{256}{889} \right) 8, \\ u_2^5 - \frac{1}{5}u_1^5 &= -5 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - \\ &- 4 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(6 - \frac{256}{889} \right) 14, \\ u_2^5 - \frac{2}{5}u_6^5 &= -2 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - \\ &- \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(4 - \frac{256}{889} \right) 15, \\ u_3^5 - \frac{3}{5}u_2^5 &= -2 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - \\ &- 3 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(8 - \frac{256}{889} \right) 18, \\ u_4^5 - \frac{1}{2}u_6^5 &= -4 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - \\ &- 2 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(1 - \frac{256}{889} \right) 29, \\ u_6^5 - \frac{7}{10}u_5^5 &= -8 \left(\frac{383742110}{126813183} \right) - \end{aligned} \tag{2.7.6}$$

$$-5 \left(-\frac{865040261}{126813183} \right) - \left(6 - \frac{256}{889} 37 \right).$$

Из системы (2.7.6) вычислим компоненты вектора u^5 за $O(n)$ операций в наихудшем случае, $n = |I^5|$, используя технологию представления опоры U_L^5 (см. рис. 2.10) в виде корневой структуры, изображенной на рис. 2.14, где

$$u^5 = (u_1^5, u_2^5, u_3^5, u_4^5, u_5^5, u_6^5).$$

Итак, имеем

$$u_1^5 = \frac{932088934}{90580845}, \quad u_2^5 = \frac{505310462}{62163325},$$

$$u_3^5 = \frac{261118560061}{15851647875}, \quad u_4^5 = -\frac{14955114459}{845421220},$$

$$u_5^5 = -\frac{551965961}{126813183}, \quad u_6^5 = -\frac{22319138837}{1268131830}.$$

Дополним вектор $r = (r_p : p = \overline{1, l}; \gamma_{ij}, (i, j) \in U^*)$ компонентами $\gamma_{ij} = 0, (i, j) \in U_0 \setminus U^*$. Получим новый вектор

$$\tilde{r} = (r_p : p = \overline{1, l}; \gamma_{ij}, (i, j) \in U^*; \gamma_{ij} = 0, (i, j) \in U_0 \setminus U^*).$$

Вычисляем оценки $\bar{\Delta}^k(i, j)$ для дуг $(i, j)^k \in U_N^k, U_N^k = U^k \setminus U_S^k, k \in K$, а также для дуг $(i, j)^k, k \in K_S^0(i, j), (i, j) \in U^*$, используя формулу

$$\bar{\Delta}^k(i, j) = -(p_{ij}^k - f(x)q_{ij}^k) - (u_i^k - \mu_{ij}^k u_j^k + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^{kp} r_p). \quad (2.7.7)$$

Заметим, что для каждой дуги $(i, j)^k$, где $k \in K_S^0(i, j), (i, j) \in U^*$, нет необходимости в вычислениях оценок $\bar{\Delta}^k(i, j)$ согласно (2.7.7), поскольку для каждой мультидуги $(i, j) \in U^*$ выполнено равенство:

$$\bar{\Delta}^k(i, j) = \gamma_{ij}, k \in K_S^0(i, j).$$

Итак, ненулевые оценки $\bar{\Delta}^k(i, j)$, $(i, j) \in U$, $k \in K(i, j)$, полученные согласно (2.7.7), равны

$$\bar{\Delta}^4(3,2) = -\frac{2393233952819}{25362636600},$$

$$\bar{\Delta}^4(3,4) = \frac{325102385}{1014505464}, \quad \bar{\Delta}^5(3,4) = -\frac{662785916411}{63406591500},$$

$$\bar{\Delta}^3(4,6) = \frac{4342422315103}{290402189070}, \quad \bar{\Delta}^4(4,6) = -\frac{8676211015}{338168488},$$

$$\bar{\Delta}^4(5,2) = -\frac{9548237624}{150968075}.$$

Для вычисления оценок $\bar{\Delta}^k(i, j)$, $(i, j) \in U$, $k \in K_N(i, j)$ были использованы формулы (2.7.7). Для применения формул (2.7.7) необходимо вычислить из системы (2.6.4) потенциалы r_p , $p = \overline{1, l}$; γ_{ij} , $(i, j) \in U^*$ и подставить их в исходную систему для потенциалов (2.6.1) – (2.6.3). В результате указанной подстановки получим разреженную систему вида (2.6.5) – (2.6.7), для решения которой можно применить теоретико-графовые свойства опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.2). В результате решения разреженной системы вида (2.6.5) – (2.6.7) получены векторы потенциалов u^k , $u^k = (u_i^k, i \in I^k)$, $k \in K$.

Вычисление оценок $\bar{\Delta}^k(i, j)$, $(i, j) \in U$, $k \in K(i, j)$ можно выполнить также по формулам (2.4.21). В этом случае необходимо вычислить только часть потенциалов, которые имеют аналитическое представление следующего вида:

$$r_p = \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_B^k} \Delta^k(\tau, \rho) \nu_{t(\tau, \rho)^k, p}, \quad p = \overline{1, l};$$

$$r_{ij} = \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_B^k} \Delta^k(\tau, \rho) \nu_{t(\tau, \rho)^k, l + \xi(i, j)}, \quad (i, j) \in U^*.$$

Итак, для выбранной опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ (см. табл. 2.2.3) обобщенной мультисети G для рассматриваемой экстремальной задачи дробно-линейного программирования (2.1.7) – (2.1.17) выполним вычисление оценок $\bar{\Delta}^k(\tau, \rho)$, используя формулы (2.4.21), которые имеют следующий вид:

$$\bar{\Delta}^k(\tau, \rho) = \Delta^k(\tau, \rho) - \sum_{p=1}^l r_p \Lambda_{\tau\rho}^{kp} - \sum_{(i,j) \in U^*} r_{ij} \delta_{ij}(B_{\tau\rho}^k).$$

Потенциалы r_1 и r_2 для опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ (см. табл. 2.2.3) обобщенной мультисети G для рассматриваемой экстремальной задачи дробно-линейного программирования (2.1.7) – (2.1.17) вычисляются следующим образом:

$$r_1 = -\frac{32}{2797} \Delta^1(5,4) + \frac{52399}{142647} \Delta^2(3,4),$$

$$r_2 = \frac{88}{2797} \Delta^1(5,4) - \frac{101443}{142647} \Delta^2(3,4).$$

Для выбранной опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ (см. табл. 2.2.3) обобщенной мультисети G для рассматриваемой экстремальной задачи дробно-линейного программирования (2.1.7) – (2.1.17) оценки вычисляются согласно (2.4.21) следующим образом:

$$\bar{\Delta}^1(5,4) = \Delta^1(5,4) - \frac{1663}{8} r_1 - \frac{859}{8} r_2 = 0,$$

$$\bar{\Delta}^2(3,4) = \Delta^2(3,4) - \frac{561}{61} r_1 - \frac{204}{61} r_2 = 0,$$

$$\bar{\Delta}^3(4,6) = \Delta^3(4,6) - \frac{3041}{229} r_1 - \frac{477}{229} r_2 = \frac{4342422315103}{290402189070},$$

$$\bar{\Delta}^4(5,2) = \Delta^4(5,2) - \frac{21138}{1075} r_1 - \frac{16917}{1075} r_2 = -\frac{9548237624}{150968075},$$

$$\bar{\Delta}^4(4,6) = \Delta^4(4,6) - \frac{9391}{344} r_1 - \frac{4111}{344} r_2 = -\frac{8676211015}{338168488},$$

$$\bar{\Delta}^4(3,4) = \Delta^4(3,4) + \frac{3691}{344} r_1 + \frac{1211}{344} r_2 = \frac{325102385}{1014505464},$$

$$\bar{\Delta}^4(3,2) = \Delta^4(3,2) + \frac{20907}{8600} r_1 - \frac{124537}{8600} r_2 = -\frac{2393233952819}{25362636600},$$

$$\bar{\Delta}^5(3,4) = \Delta^5(3,4) - \frac{489}{100} r_1 - \frac{394}{125} r_2 = -\frac{662785916411}{63406591500}.$$

2.8. Критерий оптимальности мультипотока

Пусть x — некоторый мультипоток и U_S — некоторая опора обобщенной мультисети $G = (I, U)$ экстремальной неоднородной задачи дробно-линейного потокового программирования (2.1.1) — (2.1.6), где $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$.

Введем понятие невырожденного опорного мультипотока $\{x, U_S\}$.

Опорный мультипоток $\{x, U_S\}$ называется невырожденным, если выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} 0 < x_{ij}^k < d_{ij}^k, k \in K_S^1(i, j), (i, j) \in U, \\ x_{ij}^k > 0, k \in K_S(i, j) \setminus K_S^1(i, j), (i, j) \in U \setminus U_0, \\ x_{ij}^k > 0, k \in K_S^0(i, j), (i, j) \in U_0, \\ 0 < \sum_{k \in K_0(i, j)} x_{ij}^k < d_{ij}^0, (i, j) \in U_0 \setminus U^*. \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

Теорема 2.8.1. Для оптимальности мультипотока x , где

$$x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j)),$$

достаточно существования такой опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ обобщенной мультисети G для рассматриваемой экстремальной задачи дробно-линейного программирования (2.1.1) – (2.1.6), при которой на опорном мультипотоке $\{x, U_S\}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} x_{ij}^k &= 0, & \text{если } \bar{\Delta}^k(i, j) \leq 0, \\ x_{ij}^k &= d_{ij}^k, & \text{если } \bar{\Delta}^k(i, j) \geq 0, \\ x_{ij}^k &\in [0, d_{ij}^k], & \text{если } \bar{\Delta}^k(i, j) = 0, k \in K_N^1(i, j), (i, j) \in U; \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

$$\begin{aligned} x_{ij}^k &= 0, & \text{если } \bar{\Delta}^k(i, j) \leq 0, \\ x_{ij}^k &\geq 0, & \text{если } \bar{\Delta}^k(i, j) = 0, k \in K_N^0(i, j), (i, j) \in U_0; \end{aligned} \quad (2.8.3)$$

$$\begin{aligned} x_{ij}^k &= 0, & \text{если } \bar{\Delta}^k(i, j) \leq 0, \\ x_{ij}^k &\geq 0, & \text{если } \bar{\Delta}^k = 0, k \in K_N(i, j) \setminus K_N^1(i, j), (i, j) \in U \setminus U_0; \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K_0(i, j)} x_{ij}^k &= 0, & \text{если } \gamma_{ij} \leq 0, \\ \sum_{k \in K_0(i, j)} x_{ij}^k &= d_{ij}^0, & \text{если } \gamma_{ij} \geq 0, \\ \sum_{k \in K_0(i, j)} x_{ij}^k &\in [0, d_{ij}^0], & \text{если } \gamma_{ij} = 0, (i, j) \in U^*. \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

Обратно, если x – оптимальный мультипоток и при некоторой опоре U_S пара $\{x, U_S\}$ – невырожденный опорный мультипоток, то на этом опорном мультипотоке выполняются соотношения (2.8.2) – (2.8.5).

Доказательство. Достаточность. Предположим, что для некоторого мультипотока x , где

$$x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j)),$$

существует такая опора

$$U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\},$$

при которой на опорном мультипотоке $\{x, U_S\}$ выполняются соотношения критерия оптимальности (2.8.2) – (2.8.5). Докажем, что при выполнении условий оптимальности (2.8.2) – (2.8.5) опорный мультипоток $\{x, U_S\}$ является оптимальным.

Наряду с мультипотоком $x \in X$ рассмотрим некоторый мультипоток $\bar{x} \in X, \bar{x} = x + \Delta x$,

$$\Delta x = (\Delta x_{ij}^k : (i, j) \in U, k \in K(i, j)),$$

$$\bar{x} = (\bar{x}_{ij}^k : (i, j) \in U, k \in K(i, j)),$$

$$\bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k + \Delta x_{ij}^k,$$

где $\Delta x = (\Delta x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ – приращение мультипотока x . Каждая компонента Δx_{ij}^k вектора Δx – приращение дугового потока x_{ij}^k мультипотока $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$.

Приращение дробно-линейной целевой функции имеет вид (2.8.6)

$$\Delta f = \frac{\sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho) \in U_N^k} \bar{\Delta}^k(\tau, \rho) \Delta x_{\tau\rho}^k + \sum_{(i, j) \in U^*} r_{ij} \Delta z_{ij}}{\sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho) \in U^k \setminus U_L^k} \Delta_Q^k(\tau, \rho) (x_{\tau\rho}^k + \Delta x_{\tau\rho}^k) + Q + \gamma}, \quad (2.8.6)$$

$$\bar{\Delta}^k(\tau, \rho) = \Delta^k(\tau, \rho) - \sum_{p=1}^l r_p \Lambda_{\tau\rho}^{kp} - \sum_{(i, j) \in U^*} r_{ij} \delta_{ij}(B_{\tau\rho}^k), \quad (2.8.7)$$

где Δz_{ij} определяется согласно (2.8.8):

$$z_{ij} = \sum_{k \in K_0(i, j)} x_{ij}^k, \quad \bar{z}_{ij} = \sum_{k \in K_0(i, j)} \bar{x}_{ij}^k,$$

$$\Delta z_{ij} = \bar{z}_{ij} - z_{ij} = \sum_{k \in K_0(i, j)} \Delta x_{ij}^k, \quad (i, j) \in U_0. \quad (2.8.8)$$

Для дробно-линейной экстремальной задачи (2.1.1) – (2.1.6) рассмотрим ограничения (2.1.5), которые имеют вид

$$0 \leq x_{ij}^k \leq d_{ij}^k, \quad k \in K_1(i, j), \quad (i, j) \in U;$$

Для мультидуги $(i, j) \in U$ для приращения Δx_{ij}^k дугового потока x_{ij}^k k -го типа, где $k \in K_N^1(i, j)$, имеем соотношения:

$$\Delta x_{ij}^k \geq 0 \quad \text{при} \quad x_{ij}^k = 0,$$

$$\Delta x_{ij}^k \leq 0 \quad \text{при} \quad x_{ij}^k = d_{ij}^k$$

Если $0 < x_{ij}^k < d_{ij}^k$, то для дугового потока k -го типа x_{ij}^k , где $k \in K_N^1(i, j)$, $(i, j) \in U$, приращение Δx_{ij}^k может иметь любой знак, но, согласно условиям (2.8.2), выполняется равенство

$$\bar{\Delta}^k(i, j) = 0.$$

Следовательно, для каждого типа потока из множества $k \in K_N^1(i, j)$ для мультидуг $(i, j) \in U$ при условиях (2.8.2) выполняется соотношение

$$\bar{\Delta}^k(i, j) \Delta x_{ij}^k \leq 0.$$

Таким образом, при выполнении условий (2.8.2) критерия оптимальности выполняется соотношение

$$\sum_{(i, j) \in U} \sum_{k \in K_N^1(i, j)} \bar{\Delta}^k(i, j) \Delta x_{ij}^k \leq 0.$$

Пусть выполнены соотношения (2.8.3) (или (2.8.4)) критерия оптимальности.

Для мультипотока x выполнены ограничения (2.1.6), которые имеют вид

$$x_{ij}^k \geq 0, k \in K(i, j) \setminus K_1(i, j), (i, j) \in U \setminus U_0.$$

В этом случае для мультидуги $(i, j) \in U$ для приращения Δx_{ij}^k дугового потока k -го типа x_{ij}^k имеем соотношения $\Delta x_{ij}^k \geq 0$, если $x_{ij}^k = 0$, где $k \in K_N^0(i, j)$, $(i, j) \in U_0$ или $k \in K_N(i, j) \setminus K_N^1(i, j)$, $(i, j) \in U \setminus U_0$.

Если $x_{ij}^k > 0$, то Δx_{ij}^k может быть любого знака, но из соотношений (2.8.3) (или (2.8.4)) имеем

$$\bar{\Delta}^k(i, j) = 0.$$

Следовательно,

$$\bar{\Delta}_{ij}^k \Delta x_{ij}^k = 0.$$

Таким образом,

$$\sum_{(i, j) \in U_0} \sum_{k \in K_N^0(i, j)} \bar{\Delta}_{ij}^k \Delta x_{ij}^k \leq 0$$

или

$$\sum_{(i, j) \in U \setminus U_0} \sum_{k \in K_N(i, j) \setminus K_N^1(i, j)} \bar{\Delta}_{ij}^k \Delta x_{ij}^k \leq 0.$$

Пусть выполнены соотношения (2.8.5) критерия оптимальности. Для каждой мультидуги $(i, j) \in U^*$ рассмотрим компоненты

$$z_{ij}, \bar{z}_{ij}, (i, j) \in U^*,$$

которые определяются согласно (2.8.8) следующим образом:

$$z_{ij} = \sum_{k \in K_0(i, j)} x_{ij}^k, \quad \bar{z}_{ij} = \sum_{k \in K_0(i, j)} \bar{x}_{ij}^k,$$

$$\Delta z_{ij} = \bar{z}_{ij} - z_{ij} = \sum_{k \in K_0(i, j)} \Delta x_{ij}^k, \quad (i, j) \in U^*.$$

Если $z_{ij} = 0$, то, согласно (2.1.4), компонента $\bar{z}_{ij} \geq 0$. Следовательно,

$$\Delta z_{ij} = \bar{z}_{ij} - z_{ij} = \sum_{k \in K_0(i, j)} \Delta x_{ij}^k \geq 0.$$

С другой стороны, в силу (2.8.5) имеем

$$\gamma_{ij} \leq 0.$$

Итак, для мультидуги $(i, j) \in U^*$ выполнено неравенство

$$\gamma_{ij} \Delta z_{ij} \leq 0.$$

Поскольку для мультидуги $(i, j) \in U^*$ выполняется условие

$$z_{ij} = d_{ij}^0,$$

то для компоненты \bar{z}_{ij} имеем

$$\bar{z}_{ij} \leq d_{ij}^0.$$

Следовательно,

$$\Delta z_{ij} = \bar{z}_{ij} - z_{ij} = \sum_{k \in K_0(i, j)} \Delta x_{ij}^k \leq 0.$$

Из соотношений (2.8.5) следует, что $\gamma_{ij} \geq 0$. Итак,

$$\gamma_{ij} \Delta z_{ij} \leq 0.$$

Рассмотрим случай, когда для мультидуги $(i, j) \in U^*$ выполняется условие

$$\sum_{k \in K_0(i, j)} x_{ij}^k \in]0, d_{ij}^0[.$$

В этом случае приращение

$$\Delta z_{ij} = \sum_{k \in K_0(i, j)} \Delta x_{ij}^k$$

может иметь любой знак, но согласно (2.8.5) имеем $\gamma_{ij} = 0$.

Следовательно,

$$\gamma_{ij} \left(\sum_{k \in K_0(i, j)} \Delta x_{ij}^k \right) = 0.$$

Таким образом, если выполнены условия (2.8.5), то справедливо неравенство

$$\sum_{(i, j) \in U^*} \gamma_{ij} \left(\sum_{k \in K_0(i, j)} \Delta x_{ij}^k \right) \leq 0.$$

Окончательно в соответствии с формулой

$$\Delta f = \frac{\sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_N^k} \bar{\Delta}^k(\tau, \rho) \Delta x_{\tau\rho}^k + \sum_{(i, j) \in U^*} r_{ij} \Delta z_{ij}}{\sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta_Q^k(\tau, \rho) (x_{\tau\rho}^k + \Delta x_{\tau\rho}^k)} + Q + \gamma$$

приращения дробно-линейной целевой функции задачи (2.1.1) – (2.1.6), имеем

$$\Delta f \leq 0.$$

Поскольку неравенство $\Delta f \leq 0$ верно для любых $\bar{x} = x + \Delta x \in X$, то $\{x, U_S\}$ – оптимальный опорный мультипоток экстремальной задачи дробно-линейного потокового программирования (2.1.1) – (2.1.6).

Необходимость. Пусть $\{x, U_S\}$ – оптимальный опорный невырожденный мультипоток. Это означает, что на опорном мультипоточе $\{x, U_S\}$ выполняются условия оптимальности (2.8.2) – (2.8.5), а также условия невырожденности (2.8.1).

Доказательство проводится методом от противного. Предположим, что условия критерия оптимальности нарушаются. Но при этом условия невырожденности (2.8.1) выполняются.

Пусть нарушаются условия (2.8.2) критерия оптимальности, т. е. существует дуга $(i_0, j_0)^{k_0}$, $k_0 \in K_N^1(i_0, j_0)$, $(i_0, j_0) \in U$, такая, что имеет место один из случаев:

- а) $\bar{\Delta}_{i_0 j_0}^{k_0} > 0$ при $x_{i_0 j_0}^{k_0} = 0$,
- б) $\bar{\Delta}_{i_0 j_0}^{k_0} < 0$ при $x_{i_0 j_0}^{k_0} = d_{i_0 j_0}^{k_0}$,
- в) $\bar{\Delta}_{i_0 j_0}^{k_0} \neq 0$ при $0 < x_{i_0 j_0}^{k_0} < d_{i_0 j_0}^{k_0}$.

Построим вариацию $\Delta x_{i_0 j_0}^{k_0}$ дугового потока $x_{i_0 j_0}^{k_0}$. В случаях а) и б) знак вариации $\Delta x_{i_0 j_0}^{k_0}$ находится однозначно: $\Delta x_{i_0 j_0}^{k_0} > 0$ при $x_{i_0 j_0}^{k_0} = 0$, $\Delta x_{i_0 j_0}^{k_0} < 0$ при $x_{i_0 j_0}^{k_0} = d_{i_0 j_0}^{k_0}$.

В случае в) будем изменять дуговой поток $x_{i_0 j_0}^{k_0}$ в направлении той границы отрезка

$$[0, d_{i_0 j_0}^{k_0}],$$

на которой выполняются условия критерия оптимальности (2.8.2).

Остальные неопорные компоненты мультипоточка

$$x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$$

не изменяем. Не будем менять и значения компонент $z_{ij}, (i, j) \in U^*$.

Таким образом,

$$\Delta x_{i_0 j_0}^{k_0} = \theta \operatorname{sgn}(\Delta_{i_0 j_0}^{k_0}), k_0 \in K_N^1(i_0, j_0), \theta > 0;$$

$$\Delta x_{i_0 j_0}^k = 0, k \in K_N(i_0, j_0) \setminus k_0;$$

$$\Delta x_{ij}^k = 0, k \in K_N(i, j), (i, j) \in U \setminus (i_0, j_0);$$

$$\Delta z_{ij} = 0, (i, j) \in U^*.$$

При достаточно малых $\theta > 0$ выполняются соотношения

$$0 \leq \bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k + \Delta x_{ij}^k \leq d_{ij}^k, k \in K_N^1(i, j), (i, j) \in U;$$

$$\bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k \geq 0, k \in K_N^0(i, j), (i, j) \in U_0;$$

$$\bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k \geq 0, k \in K_N(i, j) \setminus K_N^1(i, j), (i, j) \in U \setminus U_0;$$

$$0 \leq \bar{z}_{ij} = z_{ij} \leq d_{ij}^0, (i, j) \in U^*.$$

(2.8.9)

Остальные (опорные) компоненты вектора

$$\Delta x = (\Delta x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$$

найдем из системы

$$\sum_{j \in (I_i^+(U_S^{k_0} \cup (i_0, j_0)^{k_0}))} \Delta x_{ij}^{k_0} - \sum_{j \in (I_i^-(U_S^{k_0} \cup (i_0, j_0)^{k_0}))} \mu_{ji}^{k_0} \Delta x_{ji}^{k_0} = 0, i \in I^{k_0},$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U_S^k)} \Delta x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U_S^k)} \mu_{ji}^k \Delta x_{ji}^k = 0, i \in I^k, k \in K \setminus k_0,$$

$$\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in \hat{K}_S^0(i,j)} \lambda_{ij}^{kp} \Delta x_{ij}^k = 0, p = \overline{1, l},$$

$$\sum_{k \in \hat{K}_S^0(i,j)} \Delta x_{ij}^k = 0, (i,j) \in U^*,$$

где

$$\hat{K}_S(i,j) = \begin{cases} K_S(i,j), & \text{если } (i,j) \neq (i_0, j_0), \\ K_S(i_0, j_0) \cup k_0, & \text{если } (i,j) = (i_0, j_0), \end{cases}$$

$$\hat{K}_S^0(i,j) = \begin{cases} K_S^0(i,j), & \text{если } (i,j) \neq (i_0, j_0), \\ K_S^0(i_0, j_0) \cup (k_0 \cap K_0(i,j)), & \text{если } (i,j) = (i_0, j_0), \end{cases}$$

или

$$\begin{aligned} \hat{K}_S^0(i,j) &= \hat{K}_S(i,j) \cap K_0(i,j); \\ \hat{K}_S^1(i,j) &= \hat{K}_S(i,j) \cap K_1(i,j). \end{aligned}$$

Зная $\bar{x} = x + \theta \Delta x$, построим $\bar{z}_{ij} = z_{ij} + \Delta z_{ij}$, $(i,j) \in U_0 \setminus U^*$, где

$$\bar{z}_{ij} = \sum_{k \in K_0(i,j)} x_{ij}^k, \quad \Delta z_{ij} = \sum_{k \in K_0(i,j)} \Delta x_{ij}^k.$$

При достаточно малых $\theta > 0$ в силу невырожденности (2.8.1) опорного мультипоточка $\{x, U_S\}$ выполняются неравенства:

$$\bar{z}_{ij} = z_{ij} + \Delta z_{ij} \leq d_{ij}^0, (i,j) \in U_0 \setminus U^*;$$

$$0 \leq \bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k + \Delta x_{ij}^k \leq d_{ij}^k, k \in K_S^1(i,j), (i,j) \in U;$$

$$\bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k \geq 0, k \in K_S^0(i,j), (i,j) \in U_0;$$

$$\bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k \geq 0, k \in K_S(i,j) \setminus K_S^1(i,j), (i,j) \in U \setminus U_0.$$

Следовательно, при достаточно малых $\theta > 0$, \bar{x} — мультипоток задачи (2.1.1) — (2.1.6), $\bar{x} \in X$. Согласно (2.5.6) знак приращения Δf дробно-линейной целевой функции при переходе от мультипоточка x к мультипоточку \bar{x} удовлетворяет неравенству $\Delta f > 0$. Это неравенство противоречит оптимальности мультипоточка x .

Таким образом, на оптимальном мультипотоке x выполняются соотношения (2.8.2) критерия оптимальности.

Аналогично можно получить приращение Δf дробно-линейной целевой функции, которое, при нарушении условий (2.8.3) и (2.8.4) критерия оптимальности, удовлетворяет неравенству

$$\Delta f > 0.$$

Пусть $\{x, U_S\}$ — оптимальный опорный невырожденный мультипоток. Предположим, что для него не выполняются условия (2.8.5) критерия оптимальности. Это означает, что существует дуга $(i_0, j_0) \in U^*$ такая, что имеет место один из следующих случаев:

$$\text{а) } \gamma_{i_0 j_0} < 0 \text{ для } z_{i_0 j_0} = \sum_{k \in K_0(i_0, j_0)} x_{i_0 j_0}^k = 0,$$

$$\text{б) } \gamma_{i_0 j_0} > 0 \text{ для } z_{i_0 j_0} = \sum_{k \in K_0(i_0 j_0)} x_{i_0 j_0}^k = d_{i_0 j_0}^0,$$

$$\text{в) } \gamma_{i_0 j_0} \neq 0 \text{ для } 0 < z_{i_0 j_0} = \sum_{k \in K_0(i_0, j_0)} x_{i_0 j_0}^k < d_{i_0 j_0}^0.$$

Если построить новый мультипоток \bar{x} , такой, что выполняется неравенство $\Delta f > 0$, то получим противоречие с оптимальностью мультипотока x . Для этого построим вариацию $\Delta z_{i_0 j_0}$ компоненты $z_{i_0 j_0}$ следующим образом. В случаях а) и б) знак вариации $\Delta z_{i_0 j_0}$ находится однозначно.

$$\Delta z_{i_0 j_0} > 0 \text{ при } z_{i_0 j_0} = 0 \text{ и } \Delta z_{i_0 j_0} < 0 \text{ при } z_{i_0 j_0} = d_{i_0 j_0}^0.$$

Рассмотрим случай в). В случае в) изменяем $z_{i_0 j_0}$ в направлении той границы отрезка $[0, d_{i_0 j_0}^0]$, для которой условия оптимальности (2.8.5) выполняются.

Остальные компоненты z_{ij} , $(i, j) \in U^* \setminus (i_0, j_0)$, вектора

$$z(U^*) = (z_{ij} : (i, j) \in U^*)$$

не меняем. Кроме этого, оставляем прежними неопорные компоненты мультипотока x :

$$x_{ij}^k, k \in K_N(i, j), (i, j) \in U.$$

Таким образом,

$$\Delta z_{i_0 j_0} = \theta \cdot \operatorname{sgn}(\gamma_{i_0 j_0}), \theta > 0;$$

$$\Delta z_{ij} = 0, (i, j) \in U^* \setminus (i_0, j_0);$$

$$\Delta x_{ij}^k = 0, k \in K_N(i, j), (i, j) \in U.$$

Очевидно, существует такое число $\theta_0 > 0$, что для всех $\theta \in [0, \theta_0]$ имеем

$$0 \leq \bar{z}_{i_0 j_0} = z_{i_0 j_0} + \theta \Delta z_{i_0 j_0} \leq d_{i_0 j_0}^0;$$

$$0 \leq \bar{z}_{ij} = z_{ij} + \theta \Delta z_{ij} = z_{ij} \leq d_{ij}^0, (i, j) \in U^* \setminus (i_0, j_0).$$

Поскольку опорные компоненты мультипотока x не меняем, то выполняются соотношения

$$\bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k \geq 0, k \in K_N^0(i, j), (i, j) \in U_0,$$

$$0 \leq \bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k \leq d_{ij}^k, k \in K_N^1(i, j), (i, j) \in U, \quad (2.8.10)$$

$$\bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k \geq 0, k \in K_N(i, j) \setminus K_N^1(i, j), (i, j) \in U \setminus U_0.$$

Остальные (опорные) компоненты приращения Δx мультипотока x однозначно найдем из системы

$$\sum_{j \in I_i^+(U_S^k)} \Delta x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U_S^k)} \mu_{ji}^k \Delta x_{ji}^k = 0, i \in I^k, k \in K,$$

$$\sum_{(i, j) \in U} \sum_{k \in K_S(i, j)} \lambda_{ij}^{kp} \Delta x_{ij}^k = 0, p = \overline{1, l},$$

$$\sum_{k \in K_S^0(i, j)} \Delta x_{ij}^k = \begin{cases} \Delta z_{i_0 j_0}, & (i_0, j_0) \in U^*, \\ 0, & (i, j) \in U^* \setminus (i_0, j_0). \end{cases}$$

Зная $\bar{x} = x + \theta \Delta x$, построим $\bar{z}_{ij} = z_{ij} + \Delta z_{ij}$, $(i, j) \in U_0 \setminus U^*$, где

$$z_{ij} = \sum_{k \in K_0(i, j)} x_{ij}^k, \quad \Delta z_{ij} = \sum_{k \in K_0(i, j)} \Delta x_{ij}^k.$$

Из условий невырожденности (2.8.1) следует, что величины \bar{z}_{ij} , $(i, j) \in U_0 \setminus U^*$ и \bar{x}_{ij}^k , $k \in K_S(i, j)$, $(i, j) \in U$, при достаточно малых $\theta > 0$ удовлетворяют ограничениям дробно-линейной экстремальной задачи (2.1.1) – (2.1.6). Это означает, что \bar{x} – мультипоток дробно-линейной экстремальной задачи (2.1.1) – (2.1.6).

Согласно (2.5.6) знак приращения Δf дробно-линейной целевой функции при переходе от мультипотока x к мультипотoku \bar{x} удовлетворяет неравенству

$$\Delta f > 0.$$

Полученное неравенство противоречит оптимальности опорного невырожденного мультипотока $\{x, U_S\}$.

Таким образом, на оптимальном опорном невырожденном мультипотоке $\{x, U_S\}$ выполняются соотношения (2.8.5) критерия оптимальности. Теорема доказана. \square

Для рассматриваемой экстремальной задачи дробно-линейного программирования (2.1.7) – (2.1.17) на опорном мультипотоке $\{x, U_S\}$ проверим условия критерия оптимальности (2.8.2) – (2.8.5), где мультипоток $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ и опора $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ обобщенной мультисети G представлены в табл. 2.2.7 и 2.2.3 соответственно.

Используем любую из стратегий выбора дуги [1–3, 20], для которой не выполнены условия критерия оптимальности (2.8.2) – (2.8.5) для опорного мультипотока $\{x, U_S\}$ (см. табл. 2.2.7 и 2.2.3).

Итак, выберем дугу

$$(i_0, j_0)^{k_0} = (4, 6)^3, \quad k_0 = 3, \quad k_0 \in K_N^1(i_0, j_0),$$

где

$$K_N^1(i_0, j_0) = K_N^1(4, 6) = \{3, 4\}.$$

На выбранной дуге $(i_0, j_0)^{k_0} = (4, 6)^3$ не выполняются условия (2.8.2) критерия оптимальности

$$x_{ij}^k \in [0, d_{ij}^k], \bar{\Delta}^k(i, j) = 0, k \in K_N^1(i, j), (i, j) \in U,$$

где

$$x_{46}^3 = 7, \quad x_{46}^3 \in [0, 10],$$

$$\bar{\Delta}^{k_0}(i_0, j_0) = \bar{\Delta}^3(4, 6) = \frac{4342422315103}{290402189070}.$$

Итак, определена дуга $(i_0, j_0)^{k_0} = (4, 6)^3$, для которой не выполняются условия (2.8.2) критерия оптимальности (2.8.2) – (2.8.5) для рассматриваемого опорного мультипотoka $\{x, U_S\}$, где мультипоток $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ представлен в табл. 2.2.7, а опора $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ обобщенной мультисети G экстремальной задачи дробно-линейного программирования (2.1.7) – (2.1.17) представлена в табл. 2.2.3. Согласно принципу возможных направлений [1–3] необходимо выполнить операции построения нового мультипотoka \bar{x} , где $\bar{x} = (\bar{x}_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$.

2.9. Подходящее направление

Рассмотрим опорный мультипоток $\{x, U_S\}$, где $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ – любой мультипоток дробно-линейной экстремальной задачи (2.1.1) – (2.1.6), $x \in X, U_S$ – некоторая опора обобщенной мультисети $G = (I, U)$ задачи (2.1.1) – (2.1.6). Наряду с опорным мультипотком $\{x, U_S\}$ рассмотрим также опорный мультипоток $\{\bar{x}, U_S\}$, где

$$\bar{x} = (\bar{x}_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j)),$$

$$\bar{x} = x + \Delta x, \Delta x = \bar{x} - x,$$

$$\Delta x = (\Delta x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j)), \bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k + \Delta x_{ij}^k.$$

В секции 2.3 получена формула приращения дробно-линейной целевой функции задачи (2.1.1) – (2.1.6), которая имеет вид (2.9.1):

$$\Delta f = \frac{\sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_N^k} \bar{\Delta}^k(\tau, \rho) \Delta x_{\tau\rho}^k + \sum_{(i, j) \in U^*} r_{ij} \Delta z_{ij}}{\sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta_Q^k(\tau, \rho) (x_{\tau\rho}^k + \Delta x_{\tau\rho}^k)} + Q + \gamma, \quad (2.9.1)$$

где приращения $\Delta z_{ij}, (i, j) \in U^*, U^* \subseteq U_0$ определяются из соотношений (2.9.2):

$$z = (z_{ij}, (i, j) \in U_0), z_{ij} = \sum_{k \in K_0(i, j)} x_{ij}^k,$$

$$\bar{z}_{ij} = \sum_{k \in K_0(i, j)} \bar{x}_{ij}^k, |K_0(i, j)| > 1, \quad (2.9.2)$$

$$\Delta z_{ij} = \bar{z}_{ij} - z_{ij} = \sum_{k \in K_0(i, j)} \Delta x_{ij}^k, (i, j) \in U_0,$$

$$K_0(i, j) = K(i, j) \setminus K_1(i, j), (i, j) \in U_0.$$

В секции 2.6 для вычисления оценок $\bar{\Delta}^k(i, j), (i, j) \in U, k \in K_N(i, j)$ были использованы формулы (2.7.7). Для применения формул (2.7.7) первоначально необходимо вычислить из системы (2.6.4) потенциалы $r_p, p = \bar{1}, \bar{l}; \gamma_{ij}, (i, j) \in U^*$ и подставить их в исходную систему для потенциалов (2.6.1) – (2.6.3). В результате указанной подстановки в систему (2.6.1) – (2.6.3) вычисленных потенциалов получим разреженную систему вида (2.6.5) – (2.6.7), для решения которой можно применить теоретико-графовые свойства опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.2). В результате решения разреженной системы вида (2.6.5) – (2.6.7) получим векторы потенциалов $u^k, k \in K$, где $u^k = (u_i^k, i \in I^k), k \in K$.

Вычисление оценок $\bar{\Delta}^k(\tau, \rho), (\tau, \rho)^k \in U_N^k, k \in K$ можно выполнить также по формулам (2.4.21). В этом случае необходимо вычислить только часть потенциалов следующим образом:

$$r_p = \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_B^k} \Delta^k(\tau, \rho) \nu_{t(\tau, \rho)^k, p}, p = \bar{1}, \bar{l};$$

$$r_{ij} = \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_B^k} \Delta^k(\tau, \rho) \nu_{t(\tau, \rho)^k, l + \xi(i, j)}, (i, j) \in U^*.$$

Итак, для вычисления оценок $\bar{\Delta}^k(\tau, \rho), (\tau, \rho)^k \in U_N^k, k \in K$ воспользуемся формулами (2.9.3):

$$\bar{\Delta}^k(\tau, \rho) = \Delta^k(\tau, \rho) - \sum_{p=1}^l r_p \Lambda_{\tau\rho}^{kp} - \sum_{(i,j) \in U^*} r_{ij} \delta_{ij}(B_{\tau\rho}^k), \quad (2.9.3)$$

где

$$\Delta^k(\tau, \rho) = \Delta_P^k(\tau, \rho) - f(x) \Delta_Q^k(\tau, \rho),$$

$$\Delta_P^k(\tau, \rho) = p_{\tau\rho}^k + \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} p_{ij}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho),$$

$$\Delta_Q^k(\tau, \rho) = q_{\tau\rho}^k + \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} q_{ij}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho).$$

$$\gamma_{ij} = r_{ij}, (i, j) \in U^*.$$

Согласно принципу возможных направлений [1–3] на основе мультипотока $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ построим новый мультипоток $\bar{x} = x + \Delta x$, используя формулу

$$\bar{x} = x + \theta l, l = (l_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j)).$$

Вектор l называется направлением изменения мультипотока x , число θ — шагом вдоль направления l .

Рассмотрим проблему построения направления l изменения мультипотока x . Поскольку $x, \bar{x} \in X$ — мультипотоки, то направление l для любого точного метода должно быть допустимым. Введем понятие допустимого (возможного) направления изменения мультипотока x .

Определение 2.9.1. *Направление l ,*

$$l = (l_{ij}, (i, j) \in U), l_{ij} = (l_{ij}^k, k \in K(i, j))$$

в точке x относительно множества мультипотоков X называется допустимым (возможным) направлением, если существует такое число $\theta_0 > 0$, что

$$x + \theta l \in X \quad \forall \theta \in [0, \theta_0].$$

Допустимое направление l выберем таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\Delta f \geq 0$, где Δf — приращение дробно-линейной целевой функции задачи (2.1.1) — (2.1.6) определяется согласно (2.9.1).

Определение 2.9.2. *Направление l , для которого выполняется неравенство $\Delta f \geq 0$, называется направлением возрастания целевой функции.*

Введем понятие подходящего направления изменения мультипотока $x \in X$.

Определение 2.9.3. *Направление изменения мультипотока x называется подходящим, если оно является допустимым направлением изменения мультипотока x и направлением возрастания целевой функции.*

Из условий оптимальности (2.8.2) — (2.8.5) следует, что для мультипотока x , при нарушении соотношений (2.8.2) — (2.8.5), существует подходящее направление $y = (y_{ij}, (i, j) \in U)$, $y_{ij} = (y_{ij}^k, k \in K(i, j))$ изменения мультипотока x , $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$.

Если нарушаются соотношения (2.8.2) — (2.8.4) критерия оптимальности, то положим $p_0 = 1$ и выберем дугу $(i_0, j_0)^{k_0}$, для которой не выполняются условия (2.8.2) — (2.8.4) для опорного мультипотока $\{x, U_S\}$.

При нарушении соотношений (2.8.5) критерия оптимальности положим $p_0 = 2$ и выберем мультидугу $(i_0, j_0) \in U^*$, для которой нарушены условия оптимальности (2.8.5) для опорного мультипотока $\{x, U_S\}$.

Построим подходящее направление y изменения мультипотока x , где $y = (y_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ и $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$.

Возможны случаи:

$$1) p_0 = 1, k_0 \in K_N(i_0, j_0);$$

$$2) p_0 = 2, (i_0, j_0) \in U^*.$$

2.10. Нарушение условий оптимальности на дуге

Рассмотрим построение подходящего направления y изменения мультипотока x , где $y = (y_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ и $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ для случая, когда на дуге $(i_0, j_0)^{k_0}$

для опорного мультипотока $\{x, U_S\}$, $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ условия (2.8.2) – (2.8.4) критерия оптимальности не выполняются.

Компоненты $(y_{ij}^k, k \in K_S(i, j), (i, j) \in U; y_{i_0 j_0}^{k_0})$ подходящего направления y изменения мультипотока x удовлетворяют разреженной системе линейных алгебраических уравнений (2.10.1) – (2.10.4).

$$\sum_{j \in I_i^+(U_S^k)} y_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U_S^k)} \mu_{ji}^k y_{ji}^k = 0, i \in I^k, k \in K \setminus k_0, \quad (2.10.1)$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U_S^{k_0} \cup (i_0, j_0)^{k_0})} y_{ij}^{k_0} - \sum_{j \in I_i^-(U_S^{k_0} \cup (i_0, j_0)^{k_0})} \mu_{ji}^{k_0} y_{ji}^{k_0} = 0, i \in I^{k_0}, \quad (2.10.2)$$

$$\sum_{k \in K \setminus k_0} \sum_{(i, j)^k \in U_S^k} \lambda_{ij}^{kp} y_{ij}^k + \sum_{(i, j)^{k_0} \in U_S^{k_0} \cup (i_0, j_0)^{k_0}} \lambda_{ij}^{k_0 p} y_{ij}^{k_0} = 0, p = \overline{1, l}, \quad (2.10.3)$$

$$\sum_{k \in K_S^0(i, j)} y_{ij}^k = 0, (i, j) \in U^*, y_{i_0 j_0}^{k_0} = \text{sgn}(\overline{\Delta}^{k_0}(i_0, j_0)), \quad (2.10.4)$$

где

$$\hat{K}_S(i, j) = \begin{cases} K_S(i, j), & \text{если } (i, j) \neq (i_0, j_0), \\ K_S(i_0, j_0) \cup k_0, & \text{если } (i, j) = (i_0, j_0). \end{cases} \quad (2.10.5)$$

$$\hat{K}_S^0(i, j) = \begin{cases} K_S^0(i, j), & \text{если } (i, j) \neq (i_0, j_0), \\ K_S^0(i_0, j_0) \cup (k_0 \cap K_0(i, j)), & \text{если } (i, j) = (i_0, j_0), \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \hat{K}_S^0(i, j) = \hat{K}_S(i, j) \cap K_0(i, j); \quad (2.10.6)$$

$$\hat{K}_S^1(i, j) = \hat{K}_S(i, j) \cap K_1(i, j). \quad (2.10.7)$$

На основании принципов декомпозиции опоры U_S ,

$$U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}, U_S^k \subset U^k,$$

обобщенной мультисети $G = (I, U)$ исследуемой дробно-линейной задачи потокового программирования и теоретико-графовых свойств опоры U_L обобщенной мультисети $G = (I, U)$ для разреженной системы (2.10.1) – (2.10.2) построим эффективный алгоритм решения системы (2.10.1) – (2.10.4), где $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$, $U_L^k \subseteq U_S^k$.

Применение алгоритмов декомпозиции опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$, $U_S^k \subset U^k$ для построения единственного решения системы линейных алгебраических уравнений (2.10.1) – (2.10.4) основано на учете априорной информации о структуре математической модели исследуемой дробно-линейной задачи потокового программирования и ее теоретико-графовых свойств. Декомпозиция опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$, $U_S^k \subset U^k$ позволяет выделить опору $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$, $U_L^k \subseteq U_S^k$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.10.1) – (2.10.2), которая является частью опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$, и использовать ее теоретико-графовые свойства и тип разреженности. Указанный подход позволяет решать разреженные линейные системы, используя их блочно-диагональную структуру, причем без применения их матричной формы. С этой целью используются сетевые свойства опоры U_L обобщенной сети G для разреженной системы (2.10.1) – (2.10.2) и технология представления опоры U_L в виде коллекции корневых структур, которые исследованы в главе 1, а также концепции теории графов и свойства потоков в обобщенных сетях.

Пусть U_B и U_L – множества бициклических дуг и дуг опоры обобщенной сети G для разреженной системы (2.10.1) – (2.10.2) соответственно, составляющих опору $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$.

Итак, имеем $U_S^k = U_L^k \cup U_B^k$, где U_L^k, U_B^k – непересекающиеся подмножества дуг, составляющих множества $U_S^k, k \in K$, $|U_B| = l + |U^*|$, где $U_B = \{U_B^k = U_S^k \setminus U_L^k, k \in K\}$.

Изложим алгоритм декомпозиции системы (2.10.1) – (2.10.4) по переменным, соответствующим дугам непересекающихся множеств U_B, U_L опоры U_S .

Рассмотрим бицикл $B_{i_0 j_0}^{k_0}$, порожденный дугой $(i_0, j_0)^{k_0}$ относительно множества дуг опоры $U_L^{k_0}$ сети $G^k = (I^{k_0}, U^{k_0})$.

Неизвестные системы (2.10.1) – (2.10.4), соответствующие бициклическим дугам $U_B = \{U_B^k = U_S^k \setminus U_L^k, k \in K\}$ опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ вычислим из системы (2.10.8) – (2.10.9).

$$\sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_B^k} \Lambda_{\tau \rho}^{kp} y_{\tau \rho}^k = -\Lambda_{i_0 j_0}^{k_0 p} \operatorname{sgn}(\bar{\Delta}^{k_0}(i_0, j_0)), p = \overline{1, l}; \quad (2.10.8)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_B^k} \delta_{ij}(B_{\tau \rho}^k) y_{\tau \rho}^k = -\delta_{ij}(B_{i_0 j_0}^{k_0}) \operatorname{sgn}(\bar{\Delta}^{k_0}(i_0, j_0)). \quad (2.10.9)$$

Уравнения системы (2.10.9) составлены для мультидуг $(i, j) \in U^*$, входящих в состав опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$, и значения $\delta_{ij}(B_{\tau\rho}^k)$ вычисляются из соотношений (2.10.10):

$$\delta_{ij}(B_{\tau\rho}^k) = \begin{cases} \delta_{ij}^k(\tau, \rho), k \in K_0(i, j), \\ 0, k \notin K_0(i, j), \end{cases} \quad (2.10.10)$$

где

$$(i, j) \in U^*, (\tau, \rho)^k \in U_B^k = U_S^k \setminus U_L^k, k \in K.$$

Для вычисления неизвестных системы (2.10.8) – (2.10.9), соответствующих бициклическим дугам $U_B = \{U_B^k = U_S^k \setminus U_L^k, k \in K\}$ опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$, произвольным образом пронумеруем множество бициклических дуг:

$$t = t(\tau, \rho)^k, (\tau, \rho)^k \in U_B^k, k \in K, t \in \{1, 2, \dots, |U_B|\}, \tilde{t} = |U_B|.$$

Используя введенную нумерацию множества бициклических дуг $U_B = \{U_B^k = U_S^k \setminus U_L^k, k \in K\}$ опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$, построим матрицу детерминантов D системы (2.10.8) – (2.10.9). Матрица детерминантов имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix},$$

где матрица D_1 является матрицей общего вида и состоит из детерминантов бициклов опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$:

$$D_1 = (\Lambda_{\tau\rho}^{kp}, p = \overline{1, l}, t(\tau, \rho)^k = \overline{1, |U_B|}).$$

Матрица D_2 – разреженная матрица, состоящая из элементов (2.10.10):

$$D_2 = (\delta_{ij}(B_{\tau\rho}^k), \xi(i, j) = \overline{1, |U^*|}, t(\tau, \rho)^k = \overline{1, |U_B|}),$$

где $\xi = \xi(i, j)$ – номер дуги $(i, j) \in U^*$, $\xi \in \{1, 2, \dots, |U^*|\}$.

По теореме 2.2.1 матрица D системы (2.10.8) – (2.10.9) невырожденная, поскольку соответствует опоре $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$.

Правая часть системы (2.10.8) – (2.10.9) формируется на основании бицикла $B_{i_0 j_0}^{k_0}$, порожденного дугой $(i_0, j_0)^{k_0}$ относительно множества дуг опоры $U_L^{k_0}$ сети $G^{k_0} = (I^{k_0}, U^{k_0})$, и имеет следующий вид:

$$- \begin{pmatrix} \Lambda_{i_0 j_0}^{k_0 p} \operatorname{sgn}(\bar{\Delta}^{k_0}(i_0, j_0)), p = \overline{1, l}, \\ \delta_{ij}(B_{i_0 j_0}^{k_0}) \operatorname{sgn}(\bar{\Delta}^{k_0}(i_0, j_0)), (i, j) \in U^* \end{pmatrix}.$$

Итак, из системы (2.10.8) – (2.10.9) однозначно вычислим компоненты $y_{ij}^k, (i, j)^k \in U_B^k, k \in K$ подходящего направления y , которые соответствуют бициклическим дугам $U_B = \{U_B^k = U_S^k \setminus U_L^k, k \in K\}$ опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$.

Приведем эффективный алгоритм решения системы (2.10.1) – (2.10.2) для вычисления неизвестных системы, которые соответствуют дугам опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$. Компоненты каждого вектора $y(U_L^k)$, где $y(U_L^k) = (y_{ij}^k, (i, j)^k \in U_L^k)$, соответствуют дугам множества U_L^k опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ для некоторого $k \in K$. Опора $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ обобщенной мультисети $G = (I, U)$ для системы (2.10.1) – (2.10.2) – это объединение t компонент связности S_L^k , где $S_L^k = \bigcup S_L^{k,t}$.

Каждая компонента связности $S_L^{k,t} = (I(U_L^{k,t}), U_L^{k,t})$ содержит единственный невырожденный цикл, где

$$U_L^k = \bigcup_t U_L^{k,t}, I^k = \bigcup_t I(U_L^{k,t}).$$

Приведем описание коллекции корневых структур, которая позволяет вычислить неизвестные системы (2.10.1) – (2.10.2) (компоненты вектора $y(U_L^k) = (y_{ij}^k, (i, j)^k \in U_L^k)$, соответствующие дугам множества U_L^k опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ для некоторого фиксированного $k \in K$) за число операций $O(n)$ в наихудшем случае, где $n = |I^k|, G^k = (I^k, U^k)$.

Для построения решения системы (2.10.1) – (2.10.2) с указанной оценкой числа операций для вычисления компонент вектора $y(U_L^k)$, соответствующих дугам множества U_L^k опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ для некоторого фиксированного $k \in K$, введем корневые структуры, необходимые для представления множества дуг U_L^k опоры U_L .

Итак, указанные корневые структуры для операций с элементами опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ представлены с помощью следующих списков:

- список $\{p[i], i \in I^k\}$;
- список $\{\text{depth}[i], i \in I^k\}$;
- список $\{d[i], i \in I^k\}$;
- список $\{t[i], i \in I^k\}$.

Опишем указанные структуры, необходимые для представления опоры U_L обобщенной мультисети G для системы (2.10.1) – (2.10.2):

- список $\{p[i], i \in I^k\}$ определяет для каждого узла $i \in I^k$ значение $|p[i]|$, которое является отцом узла i в корневой структуре; если $p[i] < 0$, то узел i является корнем в корневой структуре;
- список $\{\text{depth}[i], i \in I^k\}$ содержит глубину (длину пути до корня) для каждого узла $i \in I^1$; $\text{depth}[i] = 0$, если узел i является корнем;
- список $\{d[i], i \in I^k\}$ определяет для каждого узла $i \in I^k$ направление дуги в корневой структуре: если узел i является корнем, то $d[i] = 0$; если дуга $(|p[i]|, i) \in U^k$, то $d[i] = -1$; если дуга $(i, |p[i]|) \in U^k$, то $d[i] = 1$;
- список $\{t[i], i \in I^k\}$ определяет порядок решения уравнений системы (2.10.1) – (2.10.2) вычисления неизвестных, соответствующих дугам множества U_L^k опоры U_L .

Заметим, что если для каждого i элемент $p[i]$ списка $\{p[i], i \in I^k\}$ корневой структуры содержит информацию о родительской дуге (i, j) , которая соединяет узел i с узлом j – отцом узла i , то нет необходимости в хранении списка $\{d[i], i \in I^k\}$.

Формируем список $\{t[i], i \in I^k\}$ следующим образом:

- для фиксированного $t = 1$, где t – номер компоненты связности U_L^{kt} , выполняем династический обход [20] произвольного корневого дерева из коллекции корневых деревьев с корнем в некотором узле единственного невырожденного цикла компоненты связности U_L^{kt} ;
- удаляем из полученного списка корень рассматриваемого корневого дерева;
- инвертируем полученный список узлов.

Аналогичные действия выполняем для каждого дерева коллекции корневых деревьев с корнями в узлах единственного невырожденного цикла компоненты каждой компоненты связности U_L^{kt} . После обхода

всех корневых деревьев коллекции помещаем полученные списки в произвольном порядке в итоговый формируемый список $\{t[i], i \in I^k\}$. Затем в список $\{t[i], i \in I^k\}$ помещаем узлы невырожденного цикла, который входит в состав компоненты связности U_L^{kt} в следующем порядке: $j, |p[j]|, |p[|p[j]|]|, \dots, v$, где j — произвольный узел невырожденного цикла, v — узел цикла, для которого выполняется условие: $p[v] = j$.

Итак, сформированы списковые структуры, необходимые для представления компоненты связности U_L^{kt} опоры U_L^k . Затем выполняем описанные шаги формирования списка $\{t[i], i \in I^k\}$ для остальных компонент связности $U_L^{kt}, t = 1$. Далее выполняем процесс формирования списка $\{t[i], i \in I^k\}$ для компонент связности $U_L^{kt}, t = 2, \dots, s$. Сформированный список $\{t[i], i \in I^k\}$ определяет порядок решения уравнений системы (2.10.1) — (2.10.2) для вычисления неизвестных, соответствующих дугам множества U_L^k опоры U_L .

Применим описанные корневые структуры для вычисления неизвестных системы (2.10.1) — (2.10.2), которые являются компонентами вектора $y(U_L^k) = (y_{ij}^k, (i, j)^k \in U_L^k)$ и соответствуют дугам множества U_L^k опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ для некоторого фиксированного $k \in K$.

Далее продолжим описанный процесс вычисления неизвестных разреженной системы (2.10.1) — (2.10.2) для остальных элементов опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ обобщенной мультисети G для системы (2.10.1) — (2.10.2)

Компоненты $y_{ij}^k, k \in K(i, j) \setminus \hat{K}_S(i, j), (i, j) \in U$ подходящего направления y изменения мультипотока x равны нулю:

$$y_{ij}^k = 0, k \in K(i, j) \setminus \hat{K}_S(i, j), (i, j) \in U.$$

Для случая, когда не выполняются соотношения критерия оптимальности (2.8.2) — (2.8.5), построено подходящее направление $y = (y_{ij}, (i, j) \in U), y_{ij} = (y_{ij}^k, k \in K(i, j))$ изменения мультипотока x .

Рассмотрим построение подходящего направления y изменения мультипотока x для случая, когда не выполняются соотношения критерия оптимальности (2.8.2) — (2.8.5) на дуге для опорного мультипотока $\{x, U_S\}$ задачи (2.1.7) — (2.1.17).

Мультипоток $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ экстремальной дробно-линейной задачи (2.1.7) — (2.1.17) представлен в табл. 2.2.7, а опора $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ обобщенной мультисети G задачи (2.1.7) — (2.1.17) представлена в табл. 2.2.3.

Для указанного опорного мультипоточка $\{x, U_S\}$ определена дуга $(i_0, j_0)^{k_0} = (4, 6)^3$, для которой не выполняются условия (2.8.2) критерия оптимальности (2.8.2) – (2.8.5).

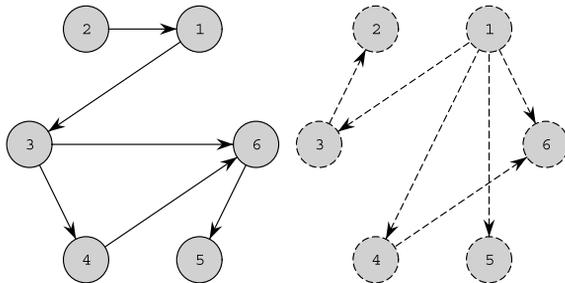


Рис. 2.15. Множества дуг U_L^1, U_L^2 опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12)

Опора $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$, $U_S^k \subset U^k$ (см. табл. 2.2.3) состоит из опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$, $U_L^k \subseteq U_S^k$ обобщенной сети G для разреженной системы вида (2.10.1) – (2.10.2) и множества U_B бициклических дуг. Предположим, что $U^* = \emptyset$.

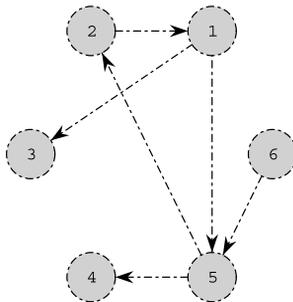


Рис. 2.16. Множество дуг U_L^3 опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12)

Опора $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$, $U_L^k \subseteq U_S^k$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12) представлена на рис. 2.15–2.18. Множество U_B состоит из бициклических дуг $U_B = \{(5, 4)^1, (3, 4)^2\}$.

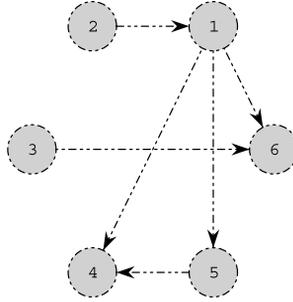


Рис. 2.17. Множество дуг U_L^A опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12)

Рассмотрим на примере разреженной системы (2.10.11) – (2.10.17) алгоритм вычисления подходящего направления y изменения мультипотока x . Компоненты $(y_{ij}^k, k \in K_S(i, j), (i, j) \in U; y_{i_0j_0}^{k_0})$ подходящего направления y изменения мультипотока x удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (2.10.11) – (2.10.17). В состав уравнений системы линейных алгебраических уравнений (2.10.11) – (2.10.17) входят уравнения, которые составляют разреженную линейную систему (2.10.11) – (2.10.15).

$$\begin{aligned}
 y_{13}^1 - \frac{7}{10}y_{21}^1 &= 0, \\
 y_{21}^1 &= 0, \\
 y_{34}^1 + y_{36}^1 - \frac{4}{5}y_{13}^1 &= 0, \\
 y_{46}^1 - \frac{9}{10}y_{34}^1 - y_{54}^1 &= 0, \\
 y_{54}^1 - \frac{1}{5}y_{65}^1 &= 0, \\
 y_{65}^1 - \frac{1}{5}y_{36}^1 - \frac{2}{5}y_{46}^1 &= 0;
 \end{aligned}
 \tag{2.10.11}$$

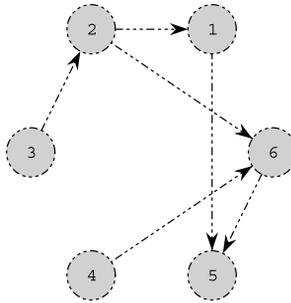


Рис. 2.18. Множество дуг U_L^5 опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12)

$$\begin{aligned}
 y_{13}^2 + y_{14}^2 + y_{15}^2 + y_{16}^2 &= 0, \\
 -\frac{2}{5}y_{32}^2 &= 0, \\
 y_{32}^2 + y_{34}^2 - \frac{1}{5}y_{13}^2 &= 0, \\
 y_{46}^2 - \frac{1}{10}y_{14}^2 - \frac{1}{10}y_{34}^2 &= 0, \\
 -\frac{1}{10}y_{15}^2 &= 0, \\
 -\frac{7}{10}y_{16}^2 - \frac{9}{10}y_{46}^2 &= 0;
 \end{aligned} \tag{2.10.12}$$

$$\begin{aligned}
 y_{13}^3 + y_{15}^3 - \frac{3}{5}y_{21}^3 &= 0, \\
 y_{21}^3 - \frac{7}{10}y_{52}^3 &= 0, \\
 -y_{13}^3 &= 0, \\
 y_{46}^3 - \frac{2}{5}y_{54}^3 &= 0, \\
 y_{52}^3 + y_{54}^3 - \frac{1}{5}y_{15}^3 - \frac{4}{5}y_{65}^3 &= 0, \\
 y_{65}^3 - \frac{7}{10}y_{46}^3 &= 0;
 \end{aligned} \tag{2.10.13}$$

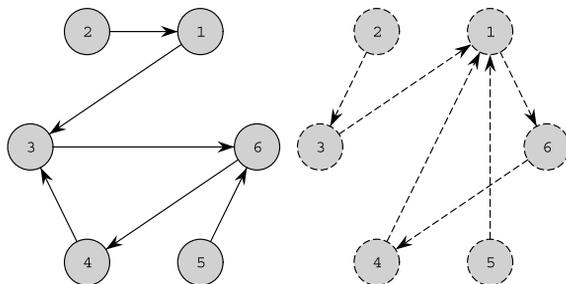
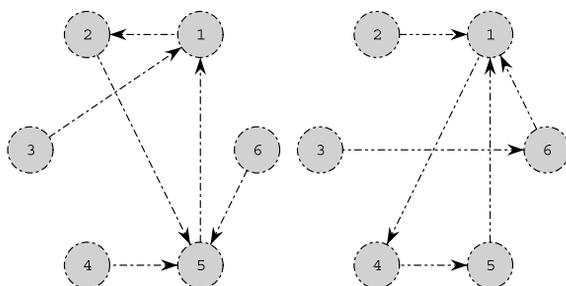
$$\begin{aligned}
y_{14}^4 + y_{15}^4 + y_{16}^4 - \frac{4}{5}y_{21}^4 &= 0, \\
y_{21}^4 &= 0, \\
y_{36}^4 &= 0, \\
-\frac{1}{5}y_{14}^4 - \frac{7}{10}y_{54}^4 &= 0, \\
y_{54}^4 - \frac{9}{10}y_{15}^4 &= 0, \\
-\frac{4}{5}y_{16}^4 - \frac{7}{10}y_{36}^4 &= 0;
\end{aligned} \tag{2.10.14}$$

$$\begin{aligned}
y_{15}^5 - \frac{1}{5}y_{21}^5 &= 0, \\
y_{21}^5 + y_{26}^5 - \frac{3}{5}y_{32}^5 &= 0, \\
y_{32}^5 = 0, \quad y_{46}^5 &= 0, \\
-\frac{2}{5}y_{15}^5 - \frac{7}{10}y_{65}^5 &= 0, \\
y_{65}^5 - \frac{2}{5}y_{26}^5 - \frac{1}{5}y_{46}^5 &= 0.
\end{aligned} \tag{2.10.15}$$

Взаимосвязи компонент $(y_{ij}^k, k \in K_S(i, j), (i, j) \in U; y_{i_0j_0}^{k_0})$ подходящего направления y представлены уравнениями (2.10.16):

$$\begin{aligned}
&7y_{13}^1 + 5y_{13}^2 + 3y_{13}^3 + 4y_{14}^2 + y_{15}^2 + y_{15}^3 + 7y_{15}^4 + 6y_{15}^5 + \\
&+ 3y_{16}^2 + y_{16}^4 + 9y_{21}^1 + 6y_{21}^3 + 2y_{21}^4 + 5y_{21}^5 + 2y_{26}^5 + 9x_{32}^2 + \\
&+ 2y_{32}^5 + 2y_{34}^1 + 8y_{34}^2 + 9y_{36}^4 + 5y_{46}^1 + \\
&+ 7y_{46}^2 + 2y_{46}^3 + 4y_{46}^5 + 2y_{52}^3 + y_{54}^1 + 9y_{54}^3 + \\
&+ 6y_{54}^4 + 3y_{65}^1 + 4y_{65}^3 + 8y_{65}^5 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & y_{13}^1 + 9y_{13}^2 + 9y_{13}^3 + 8y_{14}^2 + 3y_{14}^4 + 6y_{15}^2 + 8y_{15}^3 + 6y_{15}^4 + \\
 & + y_{15}^5 + 4y_{16}^2 + 4y_{16}^4 + 6y_{21}^1 + 2y_{21}^3 + 9y_{21}^4 + 4y_{21}^5 + y_{26}^5 + \\
 & \quad + 3y_{32}^2 + 3y_{32}^5 + 3y_{34}^2 + 6y_{36}^1 + 5y_{36}^4 + \\
 & + 9y_{46}^1 + 5y_{46}^2 + 9y_{46}^3 + 2y_{46}^5 + 2y_{52}^3 + 8y_{54}^1 + \\
 & \quad + y_{54}^3 + 2y_{54}^4 + 6y_{65}^1 + 7y_{65}^3 + 5y_{65}^5 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.10.16}$$

Рис. 2.19. Корневые структуры для множеств U_L^1 и U_L^2 Рис. 2.20. Корневые структуры для множеств U_L^3 , U_L^4

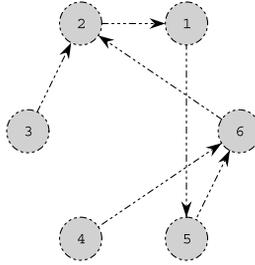


Рис. 2.21. Корневая структура для дуг множества U_L^5

Значение компоненты $y_{i_0 j_0}^{k_0}$ вектора $(y_{ij}^k, k \in K_S(i, j), (i, j) \in U; y_{i_0 j_0}^{k_0})$ подходящего направления y изменения мультипотока x вычисляется следующим образом:

$$y_{i_0 j_0}^{k_0} = \text{sgn}(\bar{\Delta}^{k_0}(i_0, j_0)),$$

$$\bar{\Delta}^{k_0}(i_0, j_0) = \bar{\Delta}^3(4, 6) = \frac{4342422315103}{290402189070}.$$

$$y_{46}^3 = 1. \tag{2.10.17}$$

Приведем алгоритм декомпозиции разреженной линейной системы (2.10.11) – (2.10.17) вычисления компонент вектора

$$(y_{ij}^k, k \in K_S(i, j), (i, j) \in U; y_{i_0 j_0}^{k_0}).$$

На основании бицикла $B_{i_0 j_0}^{k_0}$, порожденного дугой $(i_0, j_0)^{k_0} = (4, 6)^3$ относительно множества дуг опоры $U_L^{k_0}$ сети $G^{k_0} = (I^{k_0}, U^{k_0})$, сформируем вектор

$$-\begin{pmatrix} \Lambda_{i_0 j_0}^{k_0, 1} \text{sgn}(\bar{\Delta}^{k_0}(i_0, j_0)) \\ \Lambda_{i_0 j_0}^{k_0, 2} \text{sgn}(\bar{\Delta}^{k_0}(i_0, j_0)) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{3041}{229} \\ \frac{477}{229} \end{pmatrix}.$$

Составим систему (2.10.18) для вычисления компонент y_{54}^1, y_{34}^2 вектора y , соответствующих бициклическим дугам $(5,4)^1, (3,4)^2$.

$$\frac{1663}{8}y_{54}^1 + \frac{561}{61}y_{34}^2 = -\frac{3041}{229}, \quad (2.10.18)$$

$$\frac{859}{8}y_{54}^1 + \frac{204}{61}y_{34}^2 = -\frac{477}{229}.$$

На основании теоремы 2.2.1 матрица детерминантов D системы (2.10.18), построенная по опоре $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ (см. табл. 2.2.3), является невырожденной.

Следовательно, система (2.10.18) имеет единственное решение.

Итак, из системы (2.10.18) однозначно вычислим компоненты y_{54}^1, y_{34}^2 вектора y , которые соответствуют бициклическим дугам $(5,4)^1, (3,4)^2$.

Подставим в систему (2.10.11) – (2.10.17) вычисленные значения компонент y_{54}^1, y_{34}^2 , которые соответствуют бициклическим дугам $(5,4)^1, (3,4)^2$.

Получим разреженную систему линейных алгебраических уравнений блочно-диагонального вида, неизвестные которой соответствуют дугам опоры $\{U_L^k, k \in K = \{1, \dots, 5\}\}$ обобщенной мультисети G для системы (2.10.11) – (2.10.15).

Множества дуг $\{U_L^k, k \in K = \{1, \dots, 5\}\}$ опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ представлены на рис. 2.7 – 2.10. Для вычисления неизвестных системы линейных уравнений (2.10.11) – (2.10.15) воспользуемся корневыми структурами, представленными на рис. 2.19–2.21.

Приведенная коллекция корневых структур (см. рис. 2.19–2.21) позволяет вычислить компоненты вектора $y(U_L^k) = (y_{ij}^k, (i, j)^k \in U_L^k)$, соответствующие дугам множества U_L^k опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ для каждого $k \in K$ где $K = \{1, \dots, 5\}$ за $O(n)$ операций в наихудшем случае, где $n = |I^k|, G^k = (I^k, U^k)$.

Подходящее направление $y = (y_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ изменения мультипотока x (см. табл. 2.2.7) представлено в табл. 2.10.1. Для мультидуги $(i, j) = (3, 2)$ компоненты подходящего направления равны нулю: $y_{ij}^k = 0$, где $k \in K(i, j) = \{2, 4, 5\}$.

Таблица 2.10.1

Подходящее направление изменения мультипотока

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,1)	(2,6)
y_{ij}^1	0				0	
y_{ij}^2	$-\frac{554785240}{32666163}$	$\frac{620268088}{32666163}$	0	$-\frac{21827616}{10888721}$		
y_{ij}^3	0		$-\frac{2037}{2290}$		$-\frac{679}{458}$	
y_{ij}^4		0	0	0	0	
y_{ij}^5			0		0	0

(i, j)	(3,4)	(3,6)	(4,6)	(5,2)	(5,4)	(6,5)
y_{ij}^1	$\frac{1590910}{640513}$	$-\frac{1590910}{640513}$	$\frac{1487155}{640513}$		$\frac{55336}{640513}$	$\frac{276680}{640513}$
y_{ij}^2	$-\frac{110957048}{32666163}$		$\frac{50931104}{32666163}$			
y_{ij}^3			1	$-\frac{485}{229}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{10}$
y_{ij}^4	0	0	0	0	0	
y_{ij}^5	0		0			0

2.11. Нарушение условий оптимальности на мультидуге

Пусть $\{x, U_S\}$ – некоторый опорный мультипоток экстремальной дробно-линейной задачи (2.1.1) – (2.1.6), где $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ – мультипоток, $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ – опора обобщенной мультисети G задачи (2.1.1) – (2.1.6). Рассмотрим построение подходящего направления $y = (y_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ изменения мультипотока x для случая, когда не выполняются соотношения (2.8.5) критерия оптимальности на мультидуге.

Обозначим через (i_0, j_0) мультидугу, на которой нарушены условия (2.8.5) критерия оптимальности, $(i_0, j_0) \in U^*$.

Множества $K_S(i, j)$ и $K_S^0(i, j)$ определены для каждой мультидуги

(i, j) из множества U_0 следующим образом:

$$K_S(i, j) = \{k \in K(i, j) : (i, j)^k \in U_S^k\}, (i, j) \in U,$$

$$K_S^0(i, j) = K_S(i, j) \cap K_0(i, j), (i, j) \in U_0.$$

Компоненты $(y_{ij}^k, k \in K_S(i, j), (i, j) \in U; y_{i_0 j_0}^{k_0})$ подходящего направления y изменения мультипотока x удовлетворяют разреженной системе линейных алгебраических уравнений (2.11.1) – (2.11.4):

$$\sum_{j \in I_i^+(U_S^k)} y_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U_S^k)} \mu_{ji}^k y_{ji}^k = 0, i \in I^k, k \in K, \quad (2.11.1)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{(i, j)^k \in U_S^k} \lambda_{ij}^{kp} y_{ij}^k = 0, p = \overline{1, l}, \quad (2.11.2)$$

$$\sum_{k \in K_S^0(i, j)} y_{ij}^k = 0, (i, j) \in U^* \setminus (i_0, j_0), \quad (2.11.3)$$

$$\sum_{k \in K_S^0(i_0, j_0)} y_{i_0 j_0}^k = -\text{sgn}(\gamma_{i_0 j_0}), \quad (2.11.4)$$

где

$$\hat{K}_S(i, j) = K_S(i, j),$$

$$\hat{K}_S^0(i, j) = K_S(i, j) \cap K_0(i, j) = K_S^0(i, j),$$

$$\hat{K}_S^1(i, j) = K_S(i, j) \cap K_0(i, j) = K_S^1(i, j),$$

$$\gamma_{i_0 j_0} = \bar{\Delta}^k(i_0 j_0), \forall k \in K_S^0(i_0, j_0).$$

Для реализации декомпозиции системы (2.11.1) – (2.11.4) выполним разбиение неизвестных системы в соответствии со следующими множествами дуг:

- множество бициклических дуг

$$U_B = \{U_B^k = U_S^k \setminus U_L^k, k \in K\};$$

- множество дуг опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ мультисети G для разреженной системы (2.11.1).

Сформируем правую часть системы (2.11.5):

$$\left(\begin{array}{c} 0, p = \overline{1, l}, \\ -\text{sgn}(\gamma_{i_0 j_0}), (i, j) = (i_0, j_0), \\ 0, (i, j) \in U^* \setminus (i_0, j_0) \end{array} \right).$$

Неизвестные системы (2.11.1) – (2.11.4), соответствующие бициклическим дугам $U_B = \{U_B^k = U_S^k \setminus U_L^k, k \in K\}$ опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$, вычислим из системы (2.11.5):

$$\sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_B^k} \Lambda_{\tau \rho}^{kp} y_{\tau \rho}^k = 0, p = \overline{1, l},$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_B^k} \delta_{i_0 j_0} (B_{\tau \rho}^k) y_{\tau \rho}^k = -\text{sgn}(\gamma_{i_0 j_0}), \quad (2.11.5)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_B^k} \delta_{ij} (B_{\tau \rho}^k) y_{\tau \rho}^k = 0, (i, j) \in U^* \setminus (i_0, j_0).$$

По теореме 2.2.1 матрица D системы (2.11.5) невырожденная, поскольку соответствует опоре $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$. Из системы (2.11.5) однозначно вычислим значения компонент $y_{ij}^k, (i, j)^k \in U_B^k, k \in K$, подходящего направления y , соответствующие бициклическим дугам. и подставим их в систему (2.11.1) – (2.11.4).

Подставим в систему (2.11.1) – (2.11.4) вычисленные значения компонент подходящего направления y , соответствующие бициклическим дугам. Получим разреженную систему линейных алгебраических уравнений блочно-диагонального вида, неизвестные которой соответствуют дугам опоры $\{U_L^k, k \in K\}$.

Для вычисления неизвестных $y(U_L^k) = (y_{ij}^k, (i, j)^k \in U_L^k)$, $k \in K$ системы (2.11.1) – (2.11.4) применим корневые структуры для представления опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$, которые позволяют вычислить значения компонент вектора $y(U_L^k) = (y_{ij}^k, (i, j)^k \in U_L^k)$, соответствующие дугам множества U_L^k опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ для каждого $k \in K$ за число операций $O(n)$ в наихудшем случае, где $n = |I^k|$, $G^k = (I^k, U^k)$.

Итак, для случая, когда не выполняются соотношения (2.8.5) критерия оптимальности на мультидуге (i_0, j_0) , построено подходящее направление $y = (y_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ изменения мультипотока $x \in X$.

2.12. Вычисление максимального шага

Принцип вычисления шага θ вдоль подходящего направления y изменения мультипотока $x \in X$ является общим для всех точных методов: движение вдоль подходящего направления y изменения мультипотока x ведется до тех пор, пока точка $x(\theta) = x + \theta y$ остается во множестве мультипотоков X .

Введем следующие обозначения:

$\theta_{i_w j_w}^k$ — максимальный шаг, при котором сохраняются для неоднородной задачи дробно-линейного программирования (2.1.1) – (2.1.6) следующие ограничения:

$$0 \leq \sum_{k \in K_0(i, j)} (x_{ij}^k + \theta_{ij}^k y_{ij}^k) \leq d_{ij}^0, (i, j) \in U_0.$$

$\theta_{i_x j_x}^k$ — максимальный шаг, при котором для неоднородной задачи дробно-линейного программирования (2.1.1) – (2.1.6) сохраняются прямые ограничения:

$$x_{ij}^k + \theta_{ij}^k y_{ij}^k \geq 0, k \in K_0(i, j), (i, j) \in U_0;$$

$$0 \leq x_{ij}^k + \theta_{ij}^k y_{ij}^k \leq d_{ij}^k, k \in K_1(i, j), (i, j) \in U;$$

$$x_{ij}^k + \theta_{ij}^k y_{ij}^k \geq 0, k \in K(i, j) \setminus K_1(i, j), (i, j) \in U \setminus U_0.$$

Рассмотрим построение максимального шага вдоль подходящего направления y изменения мультипотока x для случая, когда на дуге

$(i_0, j_0)^{k_0}$ для опорного мультипотока $\{x, U_S\}$, $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ условия (2.8.2) – (2.8.4) критерия оптимальности не выполняются, где $y = (y_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ и $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$.

В этом случае вычислим максимально допустимый шаг θ_0 изменения мультипотока $x \in X$ вдоль построенного направления y из условий, что совокупность чисел

$$\bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k + \theta_0 y_{ij}^k, k \in \hat{K}_S(i, j), (i, j) \in U,$$

$$\bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k, k \in K(i, j) \setminus \hat{K}_S(i, j), (i, j) \in U,$$

является мультипоток в мультисети G , где $\hat{K}_S(i, j)$ определяется по формуле (2.10.5).

Если на мультидуге $(i_0, j_0)^{k_0}$ для опорного мультипотока $\{x, U_S\}$, $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ условия (2.8.5) критерия оптимальности не выполняются, то максимально допустимый шаг θ_0 вычисляется из условий, что совокупность чисел

$$\bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k + \theta_0 y_{ij}^k, k \in \hat{K}_S(i, j), (i, j) \in U,$$

$$\bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k, k \in K(i, j) \setminus \hat{K}_S(i, j), (i, j) \in U,$$

является мультипоток в мультисети G , где $\hat{K}_S(i, j) = K_S(i, j)$.

Обозначим через θ_{ij} максимальное значение θ для каждой мультидуги $(i, j) \in \Psi_1$:

$$\Psi_1 = \begin{cases} U_0 \setminus U^*, & \text{если } p_0 = 1; \\ (U_0 \setminus U^*) \cup (i_0, j_0), & \text{если } p_0 = 2; \end{cases}$$

при котором сохраняется ограничение $0 \leq \sum_{k \in K_0(i, j)} (x_{ij}^k + \theta_{ij} y_{ij}^k) \leq d_{ij}^0$,

$$\theta_{ij} = \begin{cases} (d_{ij}^0 - \sum_{k \in K_0(i, j)} x_{ij}^k) / \sum_{k \in \hat{K}_S^0(i, j)} y_{ij}^k, & \text{если } \sum_{k \in \hat{K}_S^0(i, j)} y_{ij}^k > 0, \\ - \sum_{k \in K_0(i, j)} x_{ij}^k / \sum_{k \in \hat{K}_S^0(i, j)} y_{ij}^k, & \text{если } \sum_{k \in \hat{K}_S^0(i, j)} y_{ij}^k < 0, \\ \infty, & \text{если } \sum_{k \in \hat{K}_S^0(i, j)} y_{ij}^k = 0, \end{cases} \quad (2.12.1)$$

где $\hat{K}_S(i, j)$, $\hat{K}_S^0(i, j)$ определяются по формулам (2.10.5) – (2.10.6) в случае $p_0 = 1$ и $\hat{K}_S(i, j) = K_S(i, j)$, $\hat{K}_S^0(i, j) = K_S^0(i, j)$ в случае $p_0 = 2$.

Таким образом,

$$\theta_{i_w j_w} = \min_{(i, j) \in \Psi_1} \theta_{ij}. \quad (2.12.2)$$

Вычислим шаги

$$\theta_{ij}^k = \begin{cases} -x_{ij}^k / y_{ij}^k, & \text{если } y_{ij}^k < 0, k \in \hat{K}_S(i, j), \\ & (i, j) \in U, \\ (d_{ij}^k - x_{ij}^k) / y_{ij}^k, & \text{если } y_{ij}^k > 0, k \in \hat{K}_S^1(i, j), \\ & (i, j) \in U, \\ \infty, & \text{если } y_{ij}^k > 0, k \in \hat{K}_S(i, j) \setminus \hat{K}_S^1(i, j), \\ & (i, j) \in U, \\ \infty, & \text{если } y_{ij}^k = 0, k \in \hat{K}_S(i, j), \\ & (i, j) \in U, \end{cases} \quad (2.12.3)$$

где множества $\hat{K}_S(i, j)$, $\hat{K}_S^0(i, j)$, $\hat{K}_S^1(i, j)$ определяются по формулам (2.10.5) – (2.10.7).

Положим

$$\theta_{i_x j_x}^{k_x} = \min_{(i, j)^{k_x} \in \Psi_2} \{\theta_{ij}^k\},$$

где $\Psi_2 = \{(i, j)^k : k \in \hat{K}_S(i, j), (i, j) \in U\}$. Вычислим максимально допустимый шаг θ_0 вдоль построенного подходящего направления y :

$$\theta_0 = \min\{\theta_{i_x j_x}^{k_x}, \theta_{i_w j_w}\}.$$

Если $\theta_0 = \theta_{i_w j_w}$, $(i_w, j_w) = (i_*, j_*)$, то выполняется равенство

$$\sum_{k \in K_0(i_*, j_*)} \bar{x}_{i_* j_*}^k = d_{i_* j_*}^0,$$

т. е. ограничение, соответствующее дуге $(i_*, j_*) \in \Psi_1$ становится активным. Если $\theta_0 = \theta_{i_x j_x}^{k_x}$, $(i_x, j_x)^{k_x} = (i_*, j_*)^{k_*}$, компонента $\bar{x}_{i_* j_*}^{k_*}$ мультипотока \bar{x} становится критической, $(i_*, j_*)^{k_*} \in \Psi_2$, $k_* \in \hat{K}_S(i_*, j_*)$, т. е. компонента $\bar{x}_{i_* j_*}^{k_*}$ принимает граничное значение. Если шаг θ_0 равен бесконечности, то дробно-линейная целевая функция неограничена, в противном случае вычислим новый мультипоток $\bar{x} = x + \theta_0 y$.

Для мультипотока $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ экстремальной дробно-линейной задачи (2.1.7) – (2.1.17) (см. табл. 2.2.7) и опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ обобщенной мультисети G экстремальной неоднородной задачи (2.1.7) – (2.1.17) дробно-линейного программирования, представленной в табл. 2.2.3, определена дуга $(i_*, j_*)^{k_*}$ на которой достигнут максимально возможный шаг $\theta_0 = 0$ изменения мультипотока x вдоль построенного направления y (см. табл. 2.10.1). Итак

$$(i_*, j_*)^{k_*} = (2, 1)^3, (2, 1)^3 \in U_L^3.$$

Вычислим новый мультипоток $\bar{x} = (\bar{x}_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$. Мультипоток \bar{x} приведен в табл. 2.12.1.

Таблица 2.12.1

Новый мультипоток задачи (2.1.7) – (2.1.17)

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,1)	(2,6)
x_{ij}^1	7				5	
x_{ij}^2	3	1	2	2		
x_{ij}^3	3		6		0	
x_{ij}^4		1	8	6	8	
x_{ij}^5			5		1	2

(i, j)	(3,2)	(3,4)	(3,6)	(4,6)	(5,2)	(5,4)	(6,5)
x_{ij}^1		6	1	8		2	1
x_{ij}^2	4	9		9			
x_{ij}^3				7	4	6	9
x_{ij}^4	7	6	7	7	2	5	
x_{ij}^5	4	9		1			6

Для экстремальной задачи (2.1.7) – (2.1.17) на текущей итерации при переходе к мультипотoku \bar{x} (табл. 2.12.1) дробно-линейная целевая функция не изменяется, поскольку максимально возможный шаг θ_0 изменения мультипотока x вдоль построенного направления y равен нулю.

Мультипоток x и подходящее направление y изменения мультипотока x приведены в табл. 2.2.7 и 2.10.1 соответственно.

В случае невырожденного опорного мультипотока $\{x, U_S\}$ при переходе от мультипотока x к мультипотoku \bar{x} максимально возможный шаг $\theta_0 > 0$. Дробно-линейная целевая функция экстремальной задачи дробно-линейного программирования (2.1.1) – (2.1.6) изменяется на значение $\Delta f > 0$.

Приращение Δf дробно-линейной целевой функции экстремальной задачи дробно-линейного программирования (2.1.1) – (2.1.6) вычисляется следующим образом:

$$\Delta f = \frac{\sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k} \bar{\Delta}^k(\tau, \rho) \Delta x_{\tau\rho}^k + \sum_{(i, j) \in U^*} r_{ij} \Delta z_{ij}}{\sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \Delta_Q^k(\tau, \rho) (x_{\tau\rho}^k + \Delta x_{\tau\rho}^k) + Q + \Upsilon},$$

где Δz_{ij} определяется согласно (2.3.1),

$$\bar{\Delta}^k(\tau, \rho) = \Delta^k(\tau, \rho) - \sum_{p=1}^l r_p \Lambda_{\tau\rho}^{kp} - \sum_{(i, j) \in U^*} r_{ij} \delta_{ij}^k(B_{\tau\rho}^k).$$

Вычисление выражений $\Delta^k(\tau, \rho)$, $\Delta_P^k(\tau, \rho)$ и $\Delta_Q^k(\tau, \rho)$ осуществляется следующим образом:

$$\Delta^k(\tau, \rho) = \Delta_P^k(\tau, \rho) - f(x) \Delta_Q^k(\tau, \rho),$$

$$\Delta_P^k(\tau, \rho) = p_{\tau\rho}^k + \sum_{(i, j)^k \in U_L^k} p_{ij}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho),$$

$$\Delta_Q^k(\tau, \rho) = q_{\tau\rho}^k + \sum_{(i, j)^k \in U_L^k} q_{ij}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho),$$

$$\Upsilon_{ij} = r_{ij}, (i, j) \in U^*,$$

$$Q = \sum_{k \in K} \sum_{(i, j)^k \in U_L^k} q_{ij}^k \left(\bar{x}_{ij}^k - \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k} \bar{x}_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho) \right).$$

Итак, для экстремальной неоднородной задачи дробно-линейного программирования (2.1.7) – (2.1.17) значение целевой функции на новом мультипоточе $\bar{x} = (\bar{x}_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ равно

$$f(\bar{x}) = \frac{p(\bar{x})}{q(\bar{x})} = \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k \bar{x}_{ij}^k + \beta}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k \bar{x}_{ij}^k + \gamma} = \frac{256}{889}.$$

2.13. Преобразование опоры

При преобразовании опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ обобщенной мультисети G экстремальной дробно-линейной задачи потокового программирования (2.1.1) – (2.1.6) возможны следующие случаи:

1) $k_0 \in K_N(i_0, j_0)$, $p_0 = 1$; $\theta_0 = \theta_{i_x j_x}^{k_x}$, $(i_x, j_x)^{k_x} = (i_*, j_*)^{k_*}$, $k_* \in \hat{K}_S(i_*, j_*)$,
 $\hat{K}_S(i, j)$ определяется по формуле (2.10.5);

2) $k_0 \in K_N(i_0, j_0)$, $p_0 = 1$; $\theta_0 = \theta_{i_w j_w}$, $(i_w, j_w) = (i_*, j_*)$, $(i_*, j_*) \in \Psi_1$,
 где $\Psi_1 = U_0 \setminus U^*$;

3) $(i_0, j_0) \in U^*$, $p_0 = 2$; $\theta_0 = \theta_{i_x j_x}^{k_x}$, $(i_x, j_x)^{k_x} = (i_*, j_*)^{k_*}$, $k_* \in \hat{K}_S(i_*, j_*)$;

4) $(i_0, j_0) \in U^*$, $p_0 = 2$; $\theta_0 = \theta_{i_w j_w}$, $(i_w, j_w) = (i_*, j_*)$,
 $(i_*, j_*) \in (U_0 \setminus U^*) \cup (i_0, j_0)$,

где условия оптимальности (2.8.2) – (2.8.5) нарушены на дуге (i_0, j_0) , максимально возможный шаг θ_0 изменения мультипотока x вдоль построенного направления y достигнут на дуге (i_*, j_*) .

Преобразование опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ обобщенной мультисети G экстремальной дробно-линейной задачи потокового программирования (2.1.1) – (2.1.6) осуществляется следующим образом.

Для каждой мультидуги (i, j) из множества \bar{U}_0 обозначим:

$$\bar{K}_S^0(i, j) = \bar{K}_S(i, j) \cap \bar{K}_0(i, j),$$

где \overline{U}_S — новая опора обобщенной мультисети G экстремальной дробно-линейной задачи (2.1.1) — (2.1.6),

$$\overline{U}_S = \{\overline{U}_S^k, k \in K, \overline{U}^*\},$$

$$\overline{K}_S(i, j) = \{k \in K(i, j) : (i, j)^k \in \overline{U}_S^k\}, (i, j) \in U.$$

Для указанных случаев 1) — 4) сформируем множества \overline{U}^* , $\overline{K}_S(i, j)$, $(i, j) \in U$ по правилам (2.13.1) — (2.13.4).

1) Составим множества:

$$\overline{U}^* = U^*;$$

$$\overline{K}_S(i_0, j_0) = K_S(i_0, j_0) \cup k_0; \tag{2.13.1}$$

$$\overline{K}_S(i_*, j_*) = K_S(i_*, j_*) \setminus k_*;$$

$$\overline{K}_S(i, j) = K_S(i, j), (i, j) \in U \setminus ((i_0, j_0) \cup (i_*, j_*)).$$

2) Построим множества:

$$\overline{U}^* = U^* \cup (i_*, j_*);$$

$$\overline{K}_S(i_0, j_0) = K_S(i_0, j_0) \cup k_0; \tag{2.13.2}$$

$$\overline{K}_S(i, j) = K_S(i, j), (i, j) \in U \setminus (i_0, j_0).$$

3) Построим множества:

$$\overline{U}^* = U^* \setminus (i_0, j_0);$$

$$\overline{K}_S(i_*, j_*) = K_S(i_*, j_*) \setminus k_*; \tag{2.13.3}$$

$$\overline{K}_S(i, j) = K_S(i, j), (i, j) \in U \setminus (i_*, j_*).$$

4) Построим множества:

$$\overline{U}^* = (U^* \setminus (i_0, j_0)) \cup (i_*, j_*); \tag{2.13.4}$$

$$\overline{K}_S(i, j) = K_S(i, j), (i, j) \in U.$$

В [10] приведены правила формирования новой опоры $\bar{U}_S = \{\bar{U}_S^k, k \in K, \bar{U}^*\}$ и преобразование матрицы детерминантов для линейных неоднородных задач потокового программирования.

Выполним преобразование опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ обобщенной мультисети $G = \{I, U\}$ для экстремальной дробно-линейной задачи (2.1.7) – (2.1.17), которая приведена в табл. 2.2.3. Опора U_S состоит из опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$, $U_L^k \subseteq U_S^k$ обобщенной сети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12) и множества U_B бициклических дуг: $U_B = \{(5,4)^1, (3,4)^2\}$. Опора U_L изображена на рис. 2.7 – 2.10.

Условия оптимальности (2.8.2) – (2.8.4) нарушены на дуге $(i_0, j_0)^{k_0}$, где $(i_0, j_0)^{k_0} = (4, 6)^3$. Дугу $(i_0, j_0)^{k_0} = (4, 6)^3$ включаем в опору. Дугу $(i_*, j_*)^{k_*}$, где

$$(i_*, j_*)^{k_*} = (2, 1)^3, (2, 1)^3 \in U_L^3,$$

на которой достигнут максимально возможный шаг θ_0 изменения мультипотока x (см. табл. 2.2.7) вдоль построенного направления y , представленного в табл. 2.10.1, исключаем из опоры.

Новая опора $\bar{U}_S = \{\bar{U}_S^k, k \in K, \bar{U}^*\}$ обобщенной мультисети G экстремальной дробно-линейной задачи (2.1.7) – (2.1.17) состоит из опоры $\bar{U}_L = \{\bar{U}_L^k, k \in K\}$ обобщенной сети S для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12) и множества бициклических дуг \bar{U}_B . Новая опора $\bar{U}_L = \{\bar{U}_L^k, k \in K\}$ представлена на рис. 2.22 – 2.23.

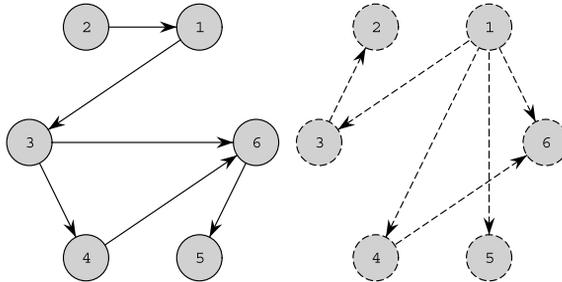


Рис. 2.22. Множества дуг $\bar{U}_L^k, k = 1, 2$ опоры \bar{U}_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12)

Множество бициклических дуг \bar{U}_B не изменяется:

$$\bar{U}_B = U_B = \{(5,4)^1, (3,4)^2\}.$$

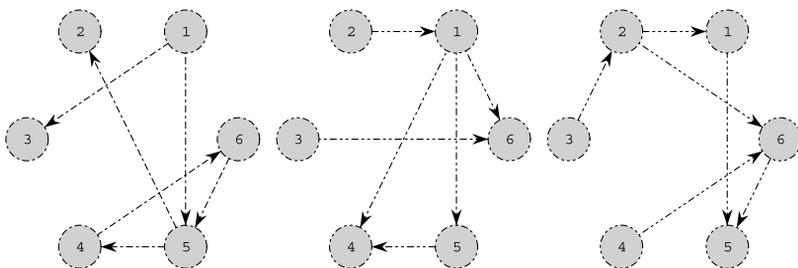


Рис. 2.23. Множества дуг \bar{U}_L^k , $k = 3, 4, 5$ опоры \bar{U}_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12)

Бициклические дуги порождают два бицикла B_{54}^1 , B_{34}^2 , которым соответствуют характеристические векторы

$$\delta^1(5,4) = (\delta_{ij}^1(5,4), (i, j)^1 \in U^1)$$

и

$$\delta^2(3,4) = (\delta_{ij}^2(3,4), (i, j)^2 \in U^2).$$

Поскольку для опор U_S и \bar{U}_S выполнены следующие равенства:

$$\bar{U}_L^1 = U_L^1,$$

$$\bar{U}_L^2 = U_L^2,$$

$$\bar{U}_B = U_B$$

и бициклические дуги опоры U_S совпадают с бициклическими дугами опоры \bar{U}_S и входят в состав множеств $U_S^1 = U_L^1 \cup U_B^1$ и $U_S^2 = U_L^2 \cup U_B^2$ опоры U_S , то останется неизменной и матрица детерминантов D .

$$D = \begin{pmatrix} \Lambda_{5,4}^{1,1} & \Lambda_{5,4}^{1,2} \\ \Lambda_{3,4}^{2,1} & \Lambda_{3,4}^{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1663}{8} & \frac{859}{8} \\ \frac{561}{61} & \frac{204}{61} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, не изменяется и обратная матрица D^{-1} :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{32}{2797} & \frac{88}{2797} \\ \frac{52399}{142647} & -\frac{101443}{142647} \end{pmatrix}.$$

При переходе от опоры U_S к опоре \bar{U}_S изменяется множество дуг U_L^3 и, следовательно, преобразуется его корневая структура. Множество \bar{U}_L^3 и корневая структура для представления множества U_L^3 изображены на рис. 2.24.

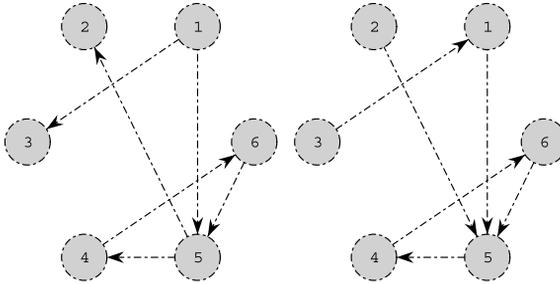


Рис. 2.24. Множество дуг \bar{U}_L^3 (слева) и его корневая структура (справа)

2.14. Преобразование опорного мультипоточка

Построим характеристические векторы

$$\{\delta^k(\tau, \rho), (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus \bar{U}_L^k, k \in K\}, \delta^k(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^k(\tau, \rho), (i, j)^k \in U^k)$$

относительно новой опоры \bar{U}_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12), где $\bar{U}_L = \{\bar{U}_L^k, k \in K\}$.

Ненулевые компоненты характеристического вектора $\delta^1(5,4)$:

$$\delta_{3,4}^1(5,4) = \frac{115}{4}, \quad \delta_{3,6}^1(5,4) = -\frac{115}{4},$$

$$\delta_{4,6}^1(5,4) = \frac{215}{8}, \quad \delta_{5,4}^1(5,4) = 1, \quad \delta_{6,5}^1(5,4) = 1.$$

Ненулевые компоненты характеристического вектора $\delta^2(3,4)$:

$$\delta_{1,3}^2(3,4) = 5, \quad \delta_{1,4}^2(3,4) = -\frac{341}{61},$$

$$\delta_{1,6}^2(3,4) = \frac{36}{61}, \quad \delta_{3,4}^2(3,4) = 1, \quad \delta_{4,6}^2(3,4) = -\frac{28}{61}.$$

Ненулевые компоненты характеристического вектора $\delta^3(2,1)$:

$$\delta_{1,5}^3(2,1) = \frac{3}{5}, \quad \delta_{2,1}^3(2,1) = 1, \quad \delta_{4,6}^3(2,1) = -\frac{458}{679},$$

$$\delta_{5,2}^3(2,1) = \frac{10}{7}, \quad \delta_{5,4}^3(2,1) = -\frac{1145}{679}, \quad \delta_{6,5}^3(2,1) = -\frac{229}{485}.$$

Ненулевые компоненты характеристического вектора $\delta^5(3,4)$:

$$\delta_{1,5}^5(3,4) = \frac{21}{500}, \quad \delta_{2,1}^5(3,4) = \frac{21}{100}, \quad \delta_{2,6}^5(3,4) = -\frac{81}{100},$$

$$\delta_{3,2}^5(3,4) = -1, \quad \delta_{3,4}^5(3,4) = 1, \quad \delta_{4,6}^5(3,4) = \frac{3}{5}, \quad \delta_{6,5}^5(3,4) = -\frac{3}{125}.$$

Характеристические векторы $\delta^4(\tau, \rho)$, $(\tau, \rho) \in U^4 \setminus \bar{U}_L^4$ представлены в табл. 2.14.1.

Совокупность операций по преобразованию опорного мультипоточка $\{x, U_S\}$ к новому опорному мультипоточку $\{\bar{x}, \bar{U}_S\}$ обозначим

$$\{x, U_S\} \longrightarrow \{\bar{x}, \bar{U}_S\}$$

и назовем итерацией метода решения дробно-линейной экстремальной задачи.

При переходе к мультипоточку \bar{x} дробно-линейная целевая функция изменяется на значение Δf , которое вычисляется согласно (2.9.1).

Для экстремальной дробно-линейной задачи (2.1.7) – (2.1.17) значения целевой функции

$$f(\bar{x}) = \frac{p(\bar{x})}{q(\bar{x})} = \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k \bar{x}_{ij}^k + \beta}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k \bar{x}_{ij}^k + \gamma}$$

на итерациях $i = 2, 3, \dots, 7$ представлены в табл. 2.14.2.

Таблица 2.14.1

Векторы $\delta^4(\tau, \rho)$, $(\tau, \rho) \in U^4 \setminus \bar{U}_L^4$

(i, j)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,1)
$\delta^4(3,2)$	$-\frac{1953}{8600}$	$\frac{31}{430}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{9}{10}$
$\delta^4(3,4)$	$-\frac{201}{344}$	$-\frac{25}{86}$	$\frac{7}{8}$	0
$\delta^4(4,6)$	$-\frac{611}{344}$	$\frac{185}{86}$	$-\frac{3}{8}$	0
$\delta^4(5,2)$	$-\frac{1498}{1075}$	$\frac{334}{215}$	0	$\frac{1}{5}$

(i, j)	(3,2)	(3,4)	(3,6)	(4,6)	(5,2)	(5,4)
$\delta^4(3,2)$	1	0	-1	0	0	$\frac{279}{4300}$
$\delta^4(3,4)$	0	1	-1	0	0	$-\frac{45}{172}$
$\delta^4(4,6)$	0	0	0	1	0	$\frac{333}{172}$
$\delta^4(5,2)$	0	0	0	0	1	$\frac{428}{1075}$

Значение дробно-линейной целевой функции $f(\bar{x})$ на 8-й итерации равно

$$\frac{581455595350269}{1966104890585933}.$$

Изложим основные результаты 8-й итерации метода решения экстремальной дробно-линейной задачи (2.1.7) – (2.1.17).

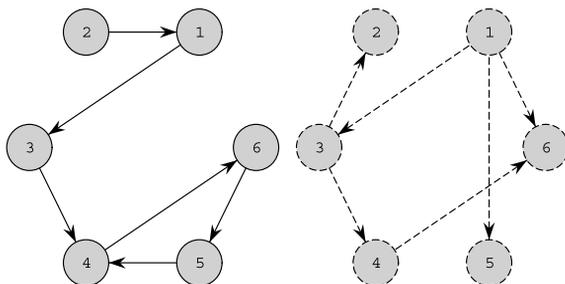
Опора $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$, $U_L^k \subseteq U_S^k$ обобщенной сети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12) состоит из одной компоненты связно-

Таблица 2.14.2

Значения дробно-линейной целевой функции на итерациях $i = 2, 3, \dots, 7$

i	2	3	4
$f(\bar{x})$	$\frac{256}{889}$	$\frac{205821266380}{709133187693}$	$\frac{33538128694547305}{115356452198988471}$
i	5	6	7
$f(\bar{x})$	$\frac{45256778979727}{155466617218839}$	$\frac{130900722943231}{444077161133967}$	$\frac{66229381348333}{223981031926431}$

сти для каждого типа потока $k \in K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и представлена на рис. 2.25, 2.26.

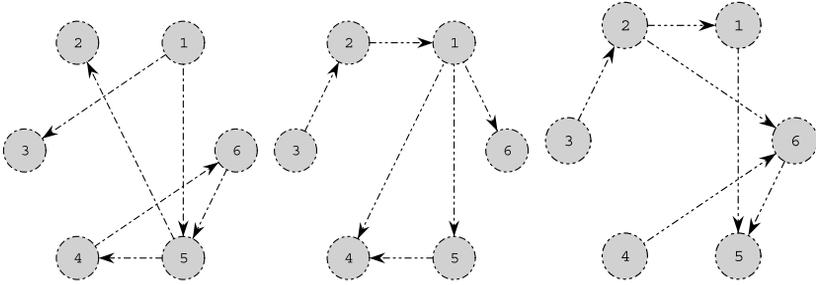
Рис. 2.25. Множества $U_L^k, k = 1, 2$ на 8-й итерации

Ненулевые компоненты оценок $\bar{\Delta}_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K_N(i, j)$ на 8-й итерации удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\bar{\Delta}^2(1, 4) < 0,$$

$$\bar{\Delta}^3(2, 1) < 0,$$

$$\bar{\Delta}^1(3, 6) < 0,$$

Рис. 2.26. Множества U_L^k , $k = 3, 4, 5$ на 8-й итерации

$$\bar{\Delta}^4(3, 4) < 0, \quad \bar{\Delta}^4(5, 2) < 0,$$

$$\bar{\Delta}^5(3, 4) > 0.$$

Ненулевые компоненты характеристических векторов $\delta^1(3,6)$, $\delta^2(1,4)$, $\delta^3(2,1)$:

$$\delta_{3,4}^1(3,6) \rightarrow -1, \quad \delta_{3,6}^1(3,6) \rightarrow 1, \quad \delta_{4,6}^1(3,6) \rightarrow -\frac{43}{46},$$

$$\delta_{5,4}^1(3,6) \rightarrow -\frac{4}{115}, \quad \delta_{6,5}^1(3,6) \rightarrow -\frac{4}{23};$$

$$\delta_{1,3}^2(1,4) \rightarrow -\frac{305}{341}, \quad \delta_{1,4}^2(1,4) \rightarrow 1, \quad \delta_{1,6}^2(1,4) \rightarrow -\frac{36}{341},$$

$$\delta_{3,4}^2(1,4) \rightarrow -\frac{61}{341}, \quad \delta_{4,6}^2(1,4) \rightarrow \frac{28}{341};$$

$$\delta_{1,5}^3(2,1) \rightarrow \frac{3}{5}, \quad \delta_{2,1}^3(2,1) \rightarrow 1, \quad \delta_{4,6}^3(2,1) \rightarrow -\frac{458}{679},$$

$$\delta_{5,2}^3(2,1) \rightarrow \frac{10}{7}, \quad \delta_{5,4}^3(2,1) \rightarrow -\frac{1145}{679}, \quad \delta_{6,5}^3(2,1) \rightarrow -\frac{229}{485}.$$

В табл. 2.14.3 приведены характеристические векторы $\delta^4(\tau, \rho)$, $(\tau, \rho) \in U^4 \setminus U_L^4$ на 8-й итерации.

Таблица 2.14.3

Векторы $\delta^4(\tau, \rho)$, $(\tau, \rho) \in U^4 \setminus U_L^4$ на 8-й итерации

(i, j)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,1)
$\delta^4(3,4)$	$-\frac{384}{1075}$	$-\frac{78}{215}$	0	$-\frac{9}{10}$
$\delta^4(3,6)$	$\frac{1953}{8600}$	$-\frac{31}{430}$	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{9}{10}$
$\delta^4(4,6)$	$-\frac{611}{344}$	$\frac{185}{86}$	$-\frac{3}{8}$	0
$\delta^4(5,2)$	$-\frac{1498}{1075}$	$\frac{334}{215}$	0	$\frac{1}{5}$

(i, j)	(3,2)	(3,4)	(3,6)	(4,6)	(5,2)	(5,4)
$\delta^4(3,4)$	-1	1	0	0	0	$-\frac{351}{1075}$
$\delta^4(3,6)$	-1	0	1	0	0	$-\frac{279}{4300}$
$\delta^4(4,6)$	0	0	0	1	0	$\frac{333}{172}$
$\delta^4(5,2)$	0	0	0	0	1	$\frac{428}{1075}$

Ненулевые компоненты характеристического вектора $\delta^5(3,4)$ на 8-й итерации:

$$\delta_{1,5}^5(3,4) \rightarrow \frac{21}{500}, \quad \delta_{2,1}^5(3,4) \rightarrow \frac{21}{100}, \quad \delta_{2,6}^5(3,4) \rightarrow -\frac{81}{100},$$

$$\delta_{3,2}^5(3,4) \rightarrow -1, \quad \delta_{3,4}^5(3,4) \rightarrow 1,$$

$$\delta_{4,6}^5(3,4) \rightarrow \frac{3}{5}, \quad \delta_{6,5}^5(3,4) \rightarrow -\frac{3}{125}.$$

Обратная матрица D^{-1} для матрицы детерминантов D имеет вид

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{205550}{7299277} & -\frac{469550}{7299277} \\ \frac{249074}{7299277} & \frac{41814}{7299277} \end{pmatrix}$$

Условия оптимальности не выполняются на дуге $(3,4)^5$. Множество бициклических дуг $U_B = \{U_S^k \setminus U_L^k, k \in K\}$ состоит из $l + |U^*| = 2$ дуг. Итак, имеем $U_B = \{(3,6)^4, (4,6)^4\}$.

Произвольным образом пронумеруем множество бициклических дуг U_B и сформируем матрицу детерминантов D :

$$D = \begin{pmatrix} \Lambda_{3,6}^{4,1} & \Lambda_{4,6}^{4,1} \\ \Lambda_{3,6}^{4,2} & \Lambda_{4,6}^{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20907}{8600} & \frac{9391}{344} \\ -\frac{124537}{8600} & \frac{4111}{344} \end{pmatrix}.$$

Ненулевые компоненты подходящего направления y изменения мультипотока x вычисляются на основе принципов декомпозиции опоры $U_S [10, 16, 41]$ с использованием теоретико-графовых свойств опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$, $U_L^k \subseteq U_S^k$ обобщенной сети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12).

Итак, ненулевые компоненты подходящего направления y изменения мультипотока x на 8-й итерации равны:

$$\begin{aligned} y_{1,4}^4 &\rightarrow \frac{250525293}{729927700}, \quad y_{1,5}^4 \rightarrow -\frac{14689049}{36496385}, \quad y_{1,5}^5 \rightarrow \frac{21}{500}, \\ y_{1,6}^4 &\rightarrow \frac{45320879}{3649638500}, \quad y_{2,1}^4 \rightarrow -\frac{42739389}{729927700}, \quad y_{2,1}^5 \rightarrow \frac{21}{100}, \quad y_{2,6}^5 \rightarrow -\frac{81}{100}, \\ y_{3,2}^4 &\rightarrow -\frac{4748821}{72992770}, \quad y_{3,2}^5 \rightarrow -1, \quad y_{3,4}^5 \rightarrow 1, \\ y_{3,6}^4 &\rightarrow -\frac{2812755448636659624}{293775120274627835}, \quad y_{3,6}^4 \rightarrow \frac{4748821}{72992770}, \\ y_{4,6}^4 &\rightarrow -\frac{337442397}{1824819250}, \quad y_{4,6}^5 \rightarrow \frac{3}{5}, \quad y_{5,4}^4 \rightarrow -\frac{132201441}{364963850}, \quad y_{6,5}^5 \rightarrow -\frac{3}{125}. \end{aligned}$$

Максимально возможный шаг $\theta_0 = \frac{245}{138}$ изменения мультипотока x

вдоль построенного подходящего направления y достигнут на мультидуге $(i_*, j_*) = (4, 6)$.

Выполним преобразование опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ обобщенной мультисети G дробно-линейной задачи потокового программирования (2.1.7) – (2.1.17) по следующим правилам:

- дугу $(i_0, j_0)^{k_0} = (3, 4)^5$, на которой не выполняются условия оптимальности (2.8.2) – (2.8.5), включаем в множество U_B бициклических дуг;
- мультидугу $(i_*, j_*) = (4, 6)$, на которой достигнут максимально возможный шаг θ_0 , вводим в состав множества U^* .

Итак, построена оптимальная опора $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ обобщенной мультисети G экстремальной дробно-линейной задачи потокового программирования (2.1.7) – (2.1.17).

Оптимальная опора $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ состоит из опоры U_L обобщенной сети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12), которая представлена на рис. 2.25, 2.26, и множества бициклических дуг U_B . Множество U_B оптимальной опоры U_S составляют дуги:

$$U_B = \{(3, 6)^4, (4, 6)^4, (3, 4)^5\}, |U_B| = l + |U^*| = 3.$$

В состав множества мультидуг U^* оптимальной опоры U_S входит мультидуга $(4, 6) : U^* = \{(4, 6)\}$.

Вычислим ненулевые компоненты характеристических векторов $\delta^1(3, 6)$, $\delta^2(1, 4)$, $\delta^3(2, 1)$ относительно опоры U_L обобщенной сети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12), которая входит в состав оптимальной опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$.

$$\delta_{3,4}^1(3, 6) \rightarrow -1, \quad \delta_{3,6}^1(3, 6) \rightarrow 1, \quad \delta_{4,6}^1(3, 6) \rightarrow -\frac{43}{46},$$

$$\delta_{5,4}^1(3, 6) \rightarrow -\frac{4}{115}, \quad \delta_{6,5}^1(3, 6) \rightarrow -\frac{4}{23};$$

$$\delta_{1,3}^2(1, 4) \rightarrow -\frac{305}{341}, \quad \delta_{1,4}^2(1, 4) \rightarrow 1, \quad \delta_{1,6}^2(1, 4) \rightarrow -\frac{36}{341},$$

$$\delta_{3,4}^2(1, 4) \rightarrow -\frac{61}{341}, \quad \delta_{4,6}^2(1, 4) \rightarrow \frac{28}{341};$$

$$\delta_{1,5}^3(2,1) \rightarrow \frac{3}{5}, \quad \delta_{2,1}^3(2,1) \rightarrow 1, \quad \delta_{4,6}^3(2,1) \rightarrow -\frac{458}{679},$$

$$\delta_{5,2}^3(2,1) \rightarrow \frac{10}{7}, \quad \delta_{5,4}^3(2,1) \rightarrow -\frac{1145}{679}, \quad \delta_{6,5}^3(2,1) \rightarrow -\frac{229}{485}.$$

Вычислим ненулевые компоненты характеристических векторов $\delta^4(\tau, \rho)$, $(\tau, \rho) \in U^4 \setminus U_L^4$ и $\delta^5(3,4)$ относительно опоры U_L обобщенной сети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12), которая входит в состав оптимальной опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$.

$$\delta_{1,4}^4(3,4) \rightarrow -\frac{384}{1075}, \quad \delta_{1,5}^4(3,4) \rightarrow -\frac{78}{215}, \quad \delta_{2,1}^4(3,4) \rightarrow -\frac{9}{10},$$

$$\delta_{3,2}^4(3,4) \rightarrow -1, \quad \delta_{3,4}^4(3,4) \rightarrow 1, \quad \delta_{5,4}^4(3,4) \rightarrow -\frac{351}{1075};$$

$$\delta_{1,4}^4(3,6) \rightarrow \frac{1953}{8600}, \quad \delta_{1,5}^4(3,6) \rightarrow -\frac{31}{430}, \quad \delta_{1,6}^4(3,6) \rightarrow -\frac{7}{8}, \quad \delta_{2,1}^4(3,6) \rightarrow -\frac{9}{10},$$

$$\delta_{3,2}^4(3,6) \rightarrow -1, \quad \delta_{3,6}^4(3,6) \rightarrow 1, \quad \delta_{5,4}^4(3,6) \rightarrow -\frac{279}{4300};$$

$$\delta_{1,4}^4(4,6) \rightarrow -\frac{611}{344}, \quad \delta_{1,5}^4(4,6) \rightarrow \frac{185}{86}, \quad \delta_{1,6}^4(4,6) \rightarrow -\frac{3}{8},$$

$$\delta_{4,6}^4(4,6) \rightarrow 1, \quad \delta_{5,4}^4(4,6) \rightarrow \frac{333}{172};$$

$$\delta_{1,4}^4(5,2) \rightarrow -\frac{1498}{1075}, \quad \delta_{1,5}^4(5,2) \rightarrow \frac{334}{215}, \quad \delta_{2,1}^4(5,2) \rightarrow \frac{1}{5},$$

$$\delta_{5,2}^4(5,2) \rightarrow 1, \quad \delta_{5,4}^4(5,2) \rightarrow \frac{428}{1075};$$

$$\delta_{1,5}^5(3,4) \rightarrow \frac{21}{500}, \quad \delta_{2,1}^5(3,4) \rightarrow \frac{21}{100}, \quad \delta_{2,6}^5(3,4) \rightarrow -\frac{81}{100},$$

$$\delta_{3,2}^5(3,4) \rightarrow -1, \quad \delta_{3,4}^5(3,4) \rightarrow 1,$$

$$\delta_{4,6}^5(3,4) \rightarrow \frac{3}{5}, \quad \delta_{6,5}^5(3,4) \rightarrow -\frac{3}{125}.$$

На основе множества бициклических дуг U_B и множества мультидуг $U^* = \{(4,6)\}$ оптимальной опоры U_S , где $U_B = \{(3,6)^4, (4,6)^4, (3,4)^5\}$, $|U_B| = l + |U^*| = 3$, формируем матрицу детерминантов D :

$$D = \begin{pmatrix} \Lambda_{3,6}^{4,1} & \Lambda_{4,6}^{4,1} & \Lambda_{3,4}^{5,1} \\ \Lambda_{3,6}^{4,2} & \Lambda_{4,6}^{4,2} & \Lambda_{3,4}^{5,2} \\ \Lambda_{3,6}^{4,3} & \Lambda_{4,6}^{4,3} & \Lambda_{3,4}^{5,3} \end{pmatrix}.$$

Итак, вычислим элементы матрицы детерминантов D относительно опоры U_L обобщенной мультисети $G = \{I, U\}$ для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12).

$$D = \begin{pmatrix} \frac{20907}{8600} & \frac{9391}{344} & \frac{489}{100} \\ -\frac{124537}{8600} & \frac{4111}{344} & \frac{394}{125} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Матрица D^{-1} , которая является обратной к матрице детерминантов D , имеет следующий вид:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{205550}{7299277} & -\frac{469550}{7299277} & \frac{4748821}{43795662} \\ \frac{249074}{7299277} & \frac{41814}{7299277} & -\frac{112480799}{364963850} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Вычислим ненулевые значения оценок $\bar{\Delta}^k(i, j)$, $(i, j) \in U, k \in K(i, j)$ экстремальной дробно-линейной неоднородной задачи потокового программирования (2.1.7) – (2.1.17).

$$\bar{\Delta}^1(3,6) < 0, \quad \bar{\Delta}^2(1,4) < 0,$$

$$\bar{\Delta}^3(2,1) < 0,$$

$$\bar{\Delta}^4(5,2) < 0, \quad \bar{\Delta}^4(3,4) < 0.$$

Для вычисленных ненулевых оценок $\bar{\Delta}^k(i, j)$, $(i, j) \in U$, $k \in K_N(i, j)$ и построенного мультипотока x выполнены условия критерия оптимальности (2.8.2) – (2.8.5).

Итак, построен оптимальный опорный мультипоток $\{x, U_S\}$ экстремальной дробно-линейной задачи потокового программирования (2.1.7) – (2.1.17).

Оптимальная опора $U_S = \{U_S^k, k \in K; U^*\}$, $U_S^k = U_L^k \cup U_B^k$ состоит из опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ обобщенной сети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12), множества бициклических дуг U_B и множества мультидуг U^* .

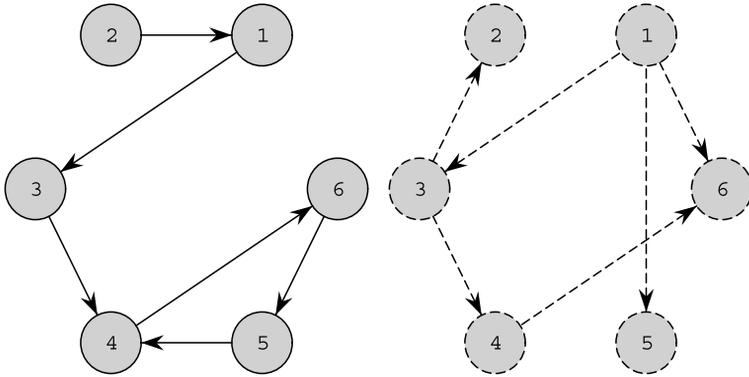


Рис. 2.27. Множества дуг $U_L^k, k = 1, 2$, оптимальной опоры U_L

На рис. 2.27 – 2.29 представлена опора $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (2.1.8) – (2.1.12), которая состоит из одной компоненты связности для каждого типа потока $k \in K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

В состав множества бициклических дуг U_B оптимальной опоры U_S входят дуги: $U_B = \{(3,6)^4, (4,6)^4, (3,4)^5\}$, множество U^* мультидуг оптимальной опоры состоит из одной дуги: $U^* = \{(4,6)\}$.

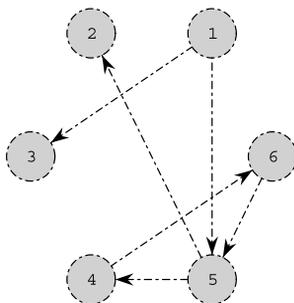


Рис. 2.28. Множество дуг U_L^3 оптимальной опоры U_L

Таблица 2.14.4

Оптимальная опора. Мультидуги $(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,6)$

(i, j)	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$	$(2,1)$	$(2,6)$
$K_S(i, j)$	$\{1,2,3\}$	$\{4\}$	$\{2,3,4,5\}$	$\{2,4\}$	$\{1,4,5\}$	$\{5\}$
$K_S^1(i, j)$	$\{1\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	\emptyset	$\{1,4\}$	$\{5\}$
$K_S^0(i, j)$	$\{2,3\}$		$\{2,3,5\}$	$\{2,4\}$		
$K_N(i, j)$	\emptyset	$\{2\}$	\emptyset	\emptyset	$\{3\}$	\emptyset
$K_N^1(i, j)$	\emptyset	$\{2\}$	\emptyset	\emptyset	$\{3\}$	\emptyset
$K_N^0(i, j)$	\emptyset		\emptyset	\emptyset		
U^*	\emptyset		\emptyset	\emptyset		
U_B	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset

Значение дробно-линейной целевой функции экстремальной задачи дробно-линейного программирования (2.1.7) – (2.1.17) на оптимальном мультипотокке x равно

$$\frac{34782199308892243}{117510048109851134}$$

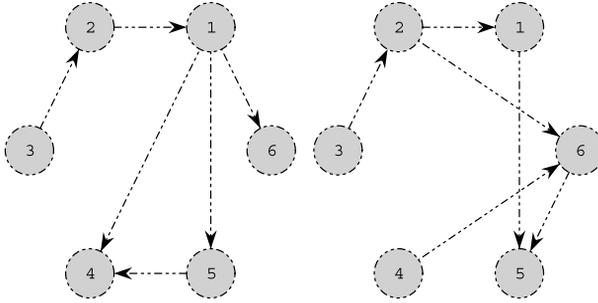


Рис. 2.29. Множества $U_L^k, k = 4, 5$, оптимальной опоры U_L

Таблица 2.14.5

Оптимальная опора. Мультидуги (3,2), (3,4), (3,6), (4,6), (5,2), (5,4)

(i, j)	(3,2)	(3,4)	(3,6)	(4,6)	(5,2)	(5,4)	(5,6)
$K_S(i, j)$	{2,4,5}	{1,2,5}	{4}	{1,2,3,4,5}	{3}	{1,3,4}	{1,3,5}
$K_S^1(i, j)$	{2,4,5}	{1}	{4}	{2,3,4}	{3}	\emptyset	{1}
$K_S^0(i, j)$		{2,5}		{1,5}		{1,3,4}	{3,5}
$K_N(i, j)$	\emptyset	{4}	{1}	\emptyset	{4}	\emptyset	\emptyset
$K_N^1(i, j)$	\emptyset	\emptyset	{1}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$K_N^0(i, j)$		{4}		\emptyset		\emptyset	\emptyset
U^*		\emptyset		+		\emptyset	\emptyset
U_B	\emptyset	{5}	{4}	{4}	\emptyset	\emptyset	\emptyset

Итак, построено оптимальное решение дробно-линейной экстремальной задачи (2.1.7) – (2.1.17).

Оптимальный мультипоток $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ дробно-линейной экстремальной задачи (2.1.7) – (2.1.17) имеет вид:

$$x_{1,3}^1 \rightarrow 7, \\ x_{1,3}^2 \rightarrow \frac{1328}{341}, x_{1,3}^3 \rightarrow 3,$$

$$x_{1,4}^2 \rightarrow 0, x_{1,4}^4 \rightarrow \frac{21965606113463}{2289929180440},$$

$$x_{1,5}^2 \rightarrow 2, x_{1,5}^3 \rightarrow 6, x_{1,5}^4 \rightarrow \frac{1237669770143}{343489377066},$$

$$x_{1,5}^5 \rightarrow \frac{23343}{4600}, x_{1,6}^2 \rightarrow \frac{718}{341}, x_{1,6}^4 \rightarrow \frac{81337643583391}{34348937706600},$$

$$x_{2,1}^1 \rightarrow 5, x_{2,1}^3 \rightarrow 0, x_{2,1}^4 \rightarrow \frac{642978086083}{73868683240},$$

$$x_{2,1}^5 \rightarrow \frac{1263}{920}, x_{2,6}^5 \rightarrow \frac{517}{920}, x_{3,2}^2 \rightarrow 4, x_{3,2}^4 \rightarrow \frac{182316265957}{22160604972},$$

$$x_{3,2}^5 \rightarrow \frac{307}{138}, x_{3,4}^1 \rightarrow 7, x_{3,4}^2 \rightarrow \frac{3130}{341}, x_{3,4}^4 \rightarrow 0, x_{3,4}^5 \rightarrow \frac{1487}{138}, x_{3,6}^1 \rightarrow 0,$$

$$x_{3,6}^4 \rightarrow \frac{260895833483}{22160604972}, x_{4,6}^1 \rightarrow \frac{411}{46}, x_{4,6}^2 \rightarrow \frac{3041}{341}, x_{4,6}^3 \rightarrow 7,$$

$$x_{4,6}^4 \rightarrow \frac{31764094856729}{5724822951100}, x_{4,6}^5 \rightarrow \frac{95}{46}, x_{5,2}^3 \rightarrow 4,$$

$$x_{5,2}^4 \rightarrow 0, x_{5,4}^1 \rightarrow \frac{234}{115}, x_{5,4}^3 \rightarrow 6, x_{5,4}^5 \rightarrow 6, x_{5,4}^4 \rightarrow \frac{696803278477}{228992918044},$$

$$x_{6,5}^1 \rightarrow \frac{27}{23}, x_{6,5}^3 \rightarrow 9, x_{6,5}^5 \rightarrow \frac{6851}{1150}.$$

Характеристики оптимальной опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K; U^*\}$ обобщенной мультисети G экстремальной дробно-линейной неоднородной задачи потокового программирования (2.1.7) – (2.1.17) представлены в табл. 2.14.4–2.14.5.

3. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Рассматриваются примеры построения оптимальных решений дробно-линейных экстремальных неоднородных задач потокового программирования, которые основаны на применении алгоритмов декомпозиции опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$, обобщенной мультисети G для исследуемой экстремальной задачи и максимальном учете априорной информации о структуре ее математической модели и теоретико-графовых свойствах. Декомпозиция опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$, $U_S^k \subset U^k$ и, как следствие, декомпозиция линейной системы на ее разреженную и общую части позволяют использовать опору $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$, $U_L^k \subseteq U_S^k$ обобщенной мультисети G для разреженной системы, ее тип разреженности и применить алгоритмы решения разреженных линейных систем без использования ее матричной формы. С этой целью используются теоретико-графовые свойства опоры U_L обобщенной сети G для разреженной системы и технология представления опоры U_L в виде коллекции корневых структур, которые исследованы в главе 1.

3.1. Пример 1

Рассмотрим конечную ориентированную обобщенную мультисеть $G = \{I, U\}$, где I — множество узлов и U — множество мультидуг, $U \subseteq I \times I$, $|I| < \infty$, $|U| < \infty$, которая представляет собой объединение $|K| = 4$ связанных обобщенных сетей:

$$G^k = (I^k, U^k), \quad k \in K = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Обобщенная мультисеть $G = (I, U)$, изображена на рис. 3.1. Рассмотрим математическую модель экстремальной неоднородной задачи дробно-линейного программирования (3.1.1) — (3.1.9).

Пусть $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ — некоторый мультипоток задачи (3.1.1) — (3.1.9), $x \in X$, где X — множество мультипоточков дробно-линейной экстремальной неоднородной задачи (3.1.1) — (3.1.9).

Для мультипотока $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ дробно-линейная целевая функция вида (2.1.1) для мультисети G , которая изображена на рис. 3.1, представлена соотношениями (3.1.1).

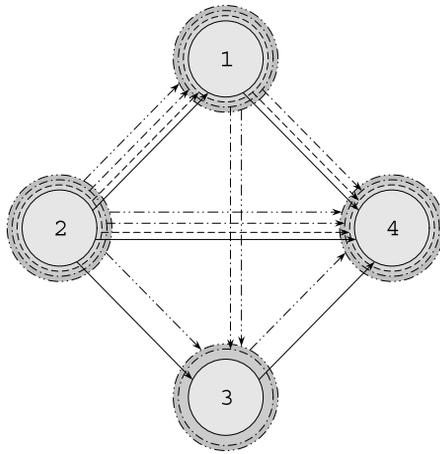


Рис. 3.1. Обобщенная мультисеть $G = (I, U)$

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^k + \beta}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k + \gamma} \rightarrow \max, \quad (3.1.1)$$

$$\beta = 0, \gamma = 0,$$

где

$$p(x) = 3x_{13}^3 + 8x_{13}^4 + 7x_{14}^1 + 10x_{14}^2 + 5x_{14}^3 + 10x_{21}^1 + x_{21}^2 + 5x_{21}^3 + \\ + 10x_{21}^4 + x_{23}^1 + 6x_{23}^4 + 9x_{24}^1 + x_{24}^2 + 3x_{24}^3 + 10x_{24}^4 + 6x_{34}^1 + 6x_{34}^4;$$

$$q(x) = 13x_{13}^3 + 18x_{13}^4 + 17x_{14}^1 + 110x_{14}^2 + 15x_{14}^3 + 110x_{21}^1 + \\ + x_{21}^2 + 15x_{21}^3 + 110x_{21}^4 + x_{23}^1 + 16x_{23}^4 + 19x_{24}^1 + x_{24}^2 + 13x_{24}^3 + \\ + 110x_{24}^4 + 16x_{34}^1 + 16x_{34}^4.$$

Выполним разложение обобщенной мультисети, изображенной на рис. 3.1, на обобщенные сети G^1, G^2, G^3, G^4 .

Рассмотрим уравнения вида (2.1.2) сетевой неоднородной задачи дробно-линейного программирования (2.1.1) – (2.1.6) для обобщенных сетей G^1, G^2, G^3, G^4 соответственно.

Имеем разреженную недоопределенную систему линейных алгебраических уравнений (3.1.2) – (3.1.5).

$$\begin{aligned}
 x_{14}^1 - x_{21}^1 &= 0 \\
 x_{21}^1 + x_{23}^1 + x_{24}^1 &= 15 \\
 x_{34}^1 - \frac{9}{10} x_{23}^1 &= \frac{16}{5} \\
 -\frac{3}{5} x_{14}^1 - \frac{3}{10} x_{24}^1 - \frac{3}{10} x_{34}^1 &= -\frac{63}{10}
 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

$$\begin{aligned}
 x_{14}^2 - \frac{3}{5} x_{21}^2 &= -\frac{1}{5} \\
 x_{21}^2 + x_{24}^2 &= 4 \\
 -\frac{7}{10} x_{14}^2 - \frac{1}{2} x_{24}^2 &= -\frac{17}{10}
 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

$$\begin{aligned}
 x_{13}^3 + x_{14}^3 - \frac{1}{10} x_{21}^3 &= \frac{47}{5} \\
 x_{21}^3 + x_{24}^3 &= 14 \\
 -\frac{1}{2} x_{13}^3 &= -\frac{7}{2} \\
 -\frac{1}{10} x_{14}^3 - x_{24}^3 &= -\frac{83}{10},
 \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

$$\begin{aligned}
 x_{13}^4 - \frac{3}{10} x_{21}^4 &= \frac{57}{10} \\
 x_{21}^4 + x_{23}^4 + x_{24}^4 &= 2 \\
 x_{34}^4 - \frac{7}{10} x_{13}^4 - \frac{4}{5} x_{23}^4 &= -\frac{16}{5} \\
 -\frac{4}{5} x_{24}^4 - \frac{9}{10} x_{34}^4 &= -\frac{17}{10}
 \end{aligned}
 \tag{3.1.5}$$

Таблица 3.1.1

Характеристики обобщенной мультисети (см. рис. 3.1)

(i, j)	(1, 3)				(1, 4)				(2, 1)			
k	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
U^k			+	+	+	+	+		+	+	+	+
U_1^k			+		+				+	+		
U_0									+			
$K(i, j)$	{3,4}				{1,2,3}				{1,2,3,4}			
$K_1(i, j)$	{3}				{1}				{1,2}			
$K_0(i, j)$									{3,4}			
(i, j)	(2, 3)				(2, 4)				(3, 4)			
k	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
U^k	+			+	+	+	+	+	+			+
U_1^k	+						+	+				+
U_0					+							
$K(i, j)$	{1,4}				{1,2,3,4}				{1,4}			
$K_1(i, j)$	{1}				{3,4}				{4}			
$K_0(i, j)$					{1,2}							

Обобщенная мультисеть G , изображенная на рис. 3.1, представлена в виде совокупности обобщенных сетей $G^k = (I^k, U^k)$, $k \in K$, где $K = \{1, 2, 3, 4\}$. Для совокупности обобщенных сетей $G^k = (I^k, U^k)$, $k \in K$, рассмотрим уравнения системы (2.1.3) неоднородной задачи дробно-линейного программирования (2.1.1) – (2.1.6).

Уравнения системы (2.1.3) отражают взаимосвязи дуговых потоков x_{ij}^k , $(i, j) \in U, k \in K(i, j)$. Представим уравнения (2.1.3) системы ограничений дробно-линейной экстремальной задачи потокового программирования (2.1.1) – (2.1.6), отражающие взаимосвязи дуговых потоков x_{ij}^k , $(i, j) \in U, k \in K(i, j)$ для совокупности обобщенных сетей $G^k = (I^k, U^k)$, $k \in K = \{1, 2, 3, 4\}$.

Итак, имеем систему линейных уравнений общего вида (3.1.6). Заметим, что в некоторых приложениях [31, 34, 36–39, 40] система уравнений (2.1.3) является разреженной системой линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{aligned}
 & 3x_{13}^3 + 4x_{13}^4 + x_{14}^1 + 8x_{21}^1 + 5x_{21}^2 + 3x_{21}^3 + 4x_{21}^4 + x_{23}^1 + \\
 & + 6x_{23}^4 + 9x_{24}^1 + x_{24}^2 + 2x_{24}^3 + 9x_{24}^4 + 2x_{34}^1 + x_{34}^4 = 234, \\
 & 8x_{13}^3 + 8x_{13}^4 + 3x_{14}^1 + 3x_{14}^2 + 7x_{21}^1 + 5x_{21}^2 + 2x_{21}^3 + 7x_{23}^1 + \\
 & + 9x_{23}^4 + 2x_{24}^1 + 5x_{24}^2 + 4x_{24}^3 + 3x_{24}^4 + 9x_{34}^1 + 4x_{34}^4 = 287.
 \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Представим неравенства (2.1.4) системы ограничений неоднородной задачи дробно-линейного программирования (2.1.1) – (2.1.6) для обобщенной мультисети $G = (I, U)$, которая изображена на рис. 3.1.

Итак, система неравенств (2.1.4) для обобщенной мультисети G , которая изображена на рис. 3.1, имеет вид (3.1.7)

$$\begin{aligned}
 & x_{21}^3 + x_{21}^4 \leq 8, x_{21}^3 \geq 0, x_{21}^4 \geq 0; \\
 & x_{24}^1 + x_{24}^2 \leq 15, x_{24}^1 \geq 0, x_{24}^2 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Представим неравенства (2.1.5) системы ограничений неоднородной задачи дробно-линейного программирования (2.1.1) – (2.1.6) для обобщенной мультисети $G = (I, U)$, которая изображена на рис. 3.1.

Итак, имеем неравенства (3.1.8):

$$\begin{aligned}
 0 \leq x_{13}^3 \leq 7, \quad 0 \leq x_{14}^1 \leq 10, \\
 0 \leq x_{21}^1 \leq 11, \quad 0 \leq x_{21}^2 \leq 3, \\
 0 \leq x_{23}^1 \leq 7, \quad 0 \leq x_{24}^3 \leq 12, \\
 0 \leq x_{24}^4 \leq 7, \quad 0 \leq x_{34}^4 \leq 8.
 \end{aligned}
 \tag{3.1.8}$$

Представим неравенства (2.1.6) системы ограничений неоднородной задачи дробно-линейного программирования (2.1.1) – (2.1.6) для обобщенной мультисети $G = (I, U)$, которая изображена на рис. 3.1.

Итак, система неравенств (2.1.6) для обобщенной мультисети G , которая изображена на рис. 3.1, имеет вид (3.1.9)

$$\begin{aligned}
 x_{13}^4 \geq 0, \quad x_{14}^2 \geq 0, \\
 x_{14}^3 \geq 0, \quad x_{23}^4 \geq 0, \\
 x_{34}^1 \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.1.9}$$

Таблица 3.1.2

Начальный мультипоток для задачи (3.1.1) – (3.1.9)

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
x_{ij}^1		3	3	2	10	5
x_{ij}^2		1	2		2	
x_{ij}^3	7	3	6		8	
x_{ij}^4	6		1	0	1	1

Пусть $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ – начальный мультипоток экстремальной неоднородной задачи дробно-линейного программирования (3.1.1) – (3.1.9), который представлен в табл. 3.1.2.

Компоненты начального мультипотока x удовлетворяют ограничениям (3.1.2) – (3.1.9) экстремальной задачи (3.1.1) – (3.1.9).

Пусть $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ – некоторая опора обобщенной мультисети G экстремальной неоднородной задачи дробно-линейного программирования (3.1.1) – (3.1.9). Опора $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ представлена в табл. 3.1.3.

Составим опорный мультипоток $\{x, U_S\}$, где мультипоток x приведен в табл. 3.1.2, а опора $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ представлена в табл. 3.1.3.

Таблица 3.1.3

Начальная опора U_S экстремальной задачи (3.1.1) – (3.1.9)

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
$K_S(i, j)$	{3,4}	{1,2,3}	{1,2,3,4}	{1,4}	{1,2,3,4}	{1,4}
$K_S^1(i, j)$	{3}	{1}	{1,2}	{1}	{3,4}	{4}
$K_S^0(i, j)$			{3,4}		{1,2}	
$K_N(i, j)$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$K_N^1(i, j)$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$K_N^0(i, j)$			\emptyset		\emptyset	
U^*			\emptyset		\emptyset	
U_B	\emptyset	\emptyset	\emptyset	{1,4}	\emptyset	\emptyset

В рассматриваемой экстремальной неоднородной задаче дробно-линейного программирования (3.1.1) – (3.1.9) опора U_S состоит из опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (3.1.2) – (3.1.5) и множества бициклических дуг $U_B = \{U_B^k, k \in K\}$.

Опора U_L состоит из одной компоненты связности для каждого типа потока $k \in K = \{1, 2, 3, 4\}$. Опора $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ представлена на рис. 3.2–3.3.

Единственный цикл каждой компоненты связности опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ является невырожденным.

Множество U^* не содержит мультидуг: $U^* = \emptyset$.

Множество U_B бициклических дуг

$$U_B = \{U_B^k = U_S^k \setminus U_L^k, k \in K\}, |U_B| = l + |U^*|$$

опоры U_S состоит из $l + |U^*| = 2$ дуг: $U_B = \{(2,3)^1, (2,3)^4\}$. Выполним произвольную нумерацию множества U_B бициклических дуг:

$$t(2,3)^1 = 1, \quad t(2,3)^4 = 2.$$

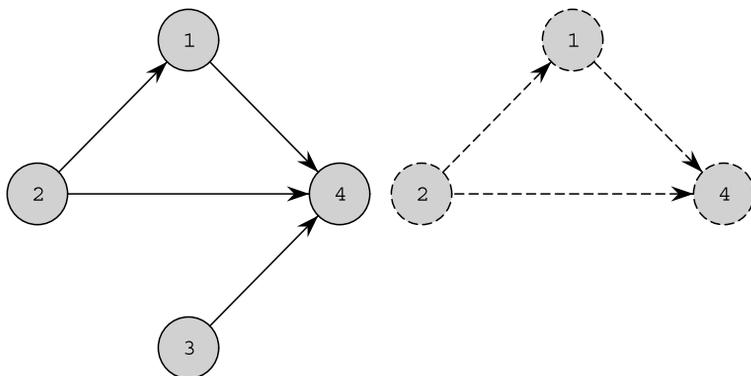


Рис. 3.2. Множества дуг $U_L^k, k = 1, 2$, опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K = \{1, 2, 3, 4\}\}$ разреженной линейной системы (3.1.2) – (3.1.5)

Таблица 3.1.4

Характеристические векторы $\delta^1(2,3), \delta^4(2,3)$

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
$\delta^1(2,3)$		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	1	$-\frac{11}{10}$	$\frac{9}{10}$
$\delta^4(2,3)$	$-\frac{24}{611}$		$-\frac{80}{611}$	1	$-\frac{531}{611}$	$\frac{472}{611}$

В табл. 3.1.4 представлена система характеристических векторов.

Для выбранной опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ (см. табл. 3.1.3) обобщенной мультисети G рассматриваемой экстремальной задачи дробно-линейного программирования (3.1.1) – (3.1.9) выполним вычисление

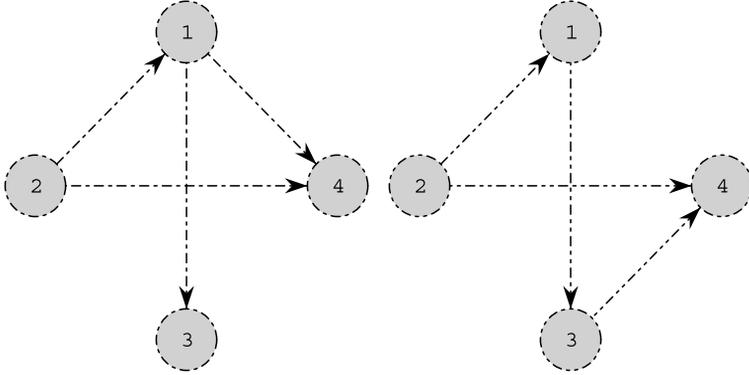


Рис. 3.3. Множества дуг U_L^k , $k = 3, 4$, опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K = \{1, 2, 3, 4\}\}$ разреженной линейной системы (3.1.2)–(3.1.5)

оценок $\bar{\Delta}^k(\tau, \rho)$, используя формулы (2.4.21), которые имеют следующий вид:

$$\bar{\Delta}^k(\tau, \rho) = \Delta^k(\tau, \rho) - \sum_{p=1}^l r_p \Lambda_{\tau\rho}^{kp} - \sum_{(i,j) \in U^*} r_{ij} \delta_{ij}(B_{\tau\rho}^k),$$

$$(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k, k \in K.$$

Поскольку $U^* = \emptyset$, то вычислим потенциалы r_1 и r_2 , используя следующие формулы:

$$r_p = \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_B^k} \Delta^k(\tau, \rho) \nu_{t(\tau, \rho)^k, p}, p = \overline{1, l}.$$

Для задачи дробно-линейного программирования (3.1.1) – (3.1.9) матрица детерминантов D_1 совпадает с матрицей D , поскольку $U^* = \emptyset$. Итак, матрица детерминантов D состоит из чисел

$$\Lambda_{\tau\rho}^{kp} = \lambda_{\tau\rho}^{kp} + \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} \lambda_{ij}^{kp} \delta_{ij}^k(\tau, \rho), (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$$

и имеет следующий вид:

$$D = D_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_{2,3}^{1,1} & \Lambda_{2,3}^{4,1} \\ \Lambda_{2,3}^{1,2} & \Lambda_{2,3}^{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{31}{5} & -\frac{1057}{611} \\ \frac{139}{10} & -\frac{5602}{611} \end{pmatrix}.$$

Для матрицы детерминантов D построим обратную матрицу D^{-1} :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \nu_{t(2,3)^1,1} & \nu_{t(2,3)^1,2} \\ \nu_{t(2,3)^4,1} & \nu_{t(2,3)^4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{56020}{200401} & -\frac{10570}{200401} \\ \frac{84929}{200401} & \frac{37882}{200401} \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$r_1 = -\frac{56020}{200401} \Delta^1(2,3) + \frac{84929}{200401} \Delta^4(2,3) = -\frac{14371095880}{176443260851},$$

$$r_2 = -\frac{10570}{200401} \Delta^1(2,3) + \frac{37882}{200401} \Delta^4(2,3) = \frac{677522891}{288777841}.$$

Согласно (3.1.10) вычислим $\Delta^k(\tau, \rho)$, $(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k$.

$$\Delta^k(\tau, \rho) = \Delta_P^k(\tau, \rho) - f(x) \Delta_Q^k(\tau, \rho). \quad (3.1.10)$$

Вычисление $\Delta_P^k(\tau, \rho)$ и $\Delta_Q^k(\tau, \rho)$ выполняется следующим образом:

$$\Delta_P^k(\tau, \rho) = p_{\tau}^k \rho + \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} p_{ij}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho),$$

$$\Delta_Q^k(\tau, \rho) = q_{\tau}^k \rho + \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} q_{ij}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho).$$

Итак, имеем

$$\Delta_P^1(2,3) = p_{2,3}^1 + \sum_{(i,j)^1 \in U_L^1} p_{ij}^1 \delta_{ij}^1(2,3) = -\frac{9}{5},$$

$$\Delta_P^4(2,3) = p_{2,3}^4 + \sum_{(i,j)^4 \in U_L^4} p_{ij}^4 \delta_{ij}^4(2,3) = \frac{196}{611},$$

$$\Delta_Q^1(2,3) = q_{2,3}^1 + \sum_{(i,j)^1 \in U_L^1} q_{ij}^1 \delta_{ij}^1(2,3) = \frac{36}{5},$$

$$\Delta_Q^4(2,3) = q_{2,3}^4 + \sum_{(i,j)^4 \in U_L^4} q_{ij}^4 \delta_{ij}^4(2,3) = -\frac{50314}{611}.$$

Вычислим $\Delta^1(2,3)$ и $\Delta^4(2,3)$, используя (3.1.10).

$$\Delta^1(2,3) = \Delta_P^1(2,3) - \frac{351}{1441} \Delta_Q^1(2,3) = -\frac{5121}{1441},$$

$$\Delta^4(2,3) = \Delta_P^4(2,3) - \frac{351}{1441} \Delta_Q^4(2,3) = \frac{1631150}{80041}.$$

Окончательно вычислим значения оценок $\bar{\Delta}^1(2,3)$ и $\bar{\Delta}^4(2,3)$.

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^1(2,3) &= \Delta^1(2,3) - \Lambda_{2,3}^{1,1} r_1 - \Lambda_{2,3}^{1,2} r_2 = \\ &= \Delta^1(2,3) + \frac{31}{5} r_1 - \frac{139}{10} r_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^4(2,3) &= \Delta^4(2,3) - \Lambda_{2,3}^{4,1} r_1 - \Lambda_{2,3}^{4,2} r_2 = \\ &= \Delta^4(2,3) + \frac{1057}{611} r_1 - \frac{5602}{611} r_2 = 0. \end{aligned}$$

Для опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ (см. табл. 3.1.3) обобщенной мультисети G рассматриваемой экстремальной задачи дробно-линейного программирования (3.1.1) – (3.1.9) значения оценок равны нулю. Следовательно, на опорном мультипотке $\{x, U_S\}$, где мультипоток x приведен в табл. 3.1.2, опора U_S представлена в табл. 3.1.3, критерий оптимальности выполняется.

Опорный мультипоток $\{x, U_S\}$ является оптимальным. Оптимальный мультипоток x представлен в табл. 3.1.2.

Оптимальная опора $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ обобщенной мультисети G неоднородной экстремальной задачи дробно-линейного программирования (3.1.1) – (3.1.9), где $U_S^k = U_L^k \cup U_B^k$, $U_L^k \cap U_B^k = \emptyset$, включает оптимальную опору $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (3.1.2) – (3.1.5) и множество бициклических дуг $U_B = \{U_B^k, k \in K\}$. Оптимальная опора U_L состоит из одной компоненты связности для каждого типа потока $k \in K = \{1, 2, 3, 4\}$ и представлена на рис. 3.2, 3.3. В состав множества бициклических дуг U_B оптимальной опоры U_S входят дуги: $U_B = \{(2,3)^1, (2,3)^4\}$. Множество U^* оптимальной опоры U_S не содержит мультидуг: $U^* = \emptyset$.

Значение дробно-линейной целевой функции (3.1.1) экстремальной задачи дробно-линейного программирования (3.1.1) – (3.1.9) на оптимальном мультипотоме x равно:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^k + \beta}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k + \gamma} = \frac{351}{1441}.$$

3.2. Пример 2

Задана конечная ориентированная связная обобщенная мультисеть $G = \{I, U\}$, где I – множество узлов и U – множество мультидуг,

$$U \subseteq I \times I, |I| < \infty, |U| < \infty,$$

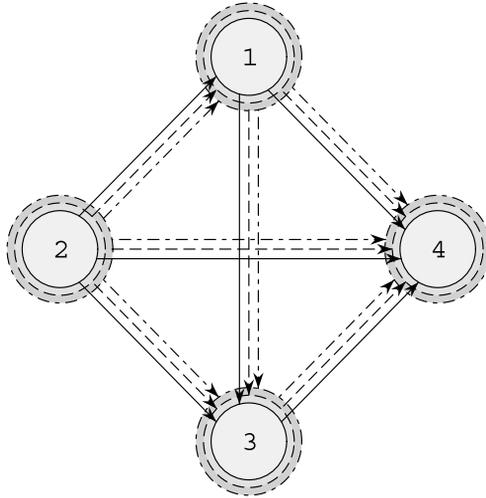
которая представляет собой объединение $|K| = 3$ связных обобщенных сетей:

$$G^k = (I^k, U^k), k \in K = \{1, 2, 3\}.$$

Обобщенная мультисеть $G = (I, U)$ (см. рис. 3.4) представлена в виде совокупности обобщенных сетей G^1, G^2, G^3 , которые изображены на рис. 3.5–3.7 соответственно.

Рассмотрим математическую модель экстремальной неоднородной задачи дробно-линейного программирования (3.2.1) – (3.2.8).

Основные характеристики обобщенной мультисети (см. рис. 3.4) и соответствующих обобщенных сетей G^1, G^2, G^3 , которые изображены на рис. 3.5 – 3.7, представлены в табл. 3.2.1.

Рис. 3.4. Обобщенная мультисеть $G = (I, U)$

Пусть $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ – некоторый мультипоток дробно-линейной экстремальной неоднородной задачи (2.1.1) – (2.1.6), $x \in X$, где X – множество мультипотоков.

Дробно-линейная целевая функция вида (2.1.1) для обобщенной мультисети $G = (I, U)$, которая изображена на рис. 3.4, представлена соотношениями (3.2.1):

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^k + \beta}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k + \gamma} \rightarrow \max, \quad (3.2.1)$$

$$\beta = 0, \gamma = 1,$$

где числитель $p(x) = \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^k + \beta$ дробно-линейной целевой функции имеет следующий вид:

$$p(x) = 6x_{13}^1 + 9x_{13}^2 + 7x_{13}^3 + x_{14}^1 + 3x_{14}^2 + 4x_{14}^3 + 7x_{21}^1 + x_{21}^2 + \\ + 3x_{21}^3 + 2x_{23}^1 + 7x_{23}^2 + 4x_{24}^1 + 9x_{24}^3 + 6x_{34}^1 + 4x_{34}^2 + 5x_{34}^3,$$

Таблица 3.2.1

Характеристики мультисети, представленной на рис. 3.4

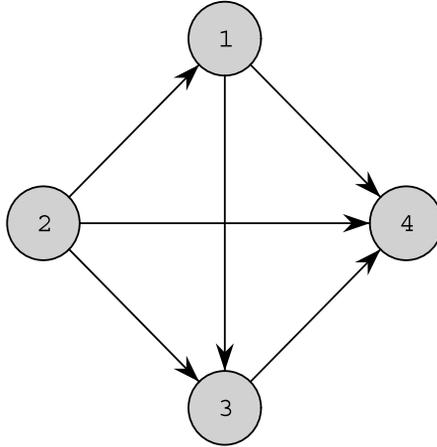
(i, j)	(1,3)			(1,4)			(2,1)		
k	1	2	3	1	2	3	1	2	3
U^k	+	+	+	+	+	+	+	+	+
U_1^k				+	+	+			
U_0							+		
$K(i, j)$	{1,2,3}			{1,2,3}			{1,2,3}		
$K_1(i, j)$	∅			{1,2,3}			∅		
$K_0(i, j)$							{1,2,3}		

(i, j)	(2,3)			(2,4)			(3,4)		
k	1	2	3	1	2	3	1	2	3
U^k	+	+	+	+	+	+	+	+	+
U_1^k	+								
U_0				+					
$K(i, j)$	{1,2,3}			{1,2,3}			{1,2,3}		
$K_1(i, j)$	{1}			∅			∅		
$K_0(i, j)$				{1,2,3}					

и знаменатель $q(x) = \sum_{(i, j) \in U} \sum_{k \in K(i, j)} q_{ij}^k x_{ij}^k + \gamma$ дробно-линейной целевой функции представлен в виде

$$\begin{aligned}
 q(x) = & 16x_{13}^1 + 19x_{13}^2 + 17x_{13}^3 + 11x_{14}^1 + 13x_{14}^2 + 14x_{14}^3 + \\
 & + 17x_{21}^1 + 11x_{21}^2 + 13x_{21}^3 + 12x_{23}^1 + 17x_{23}^2 + 10x_{23}^3 + 14x_{24}^1 + 10x_{24}^2 + \\
 & + 19x_{24}^3 + 16x_{34}^1 + 14x_{34}^2 + 15x_{34}^3 + 1.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнения разреженной системы вида (2.1.2) неоднородной задачи дробно-линейного программирования (2.1.1) – (2.1.6).

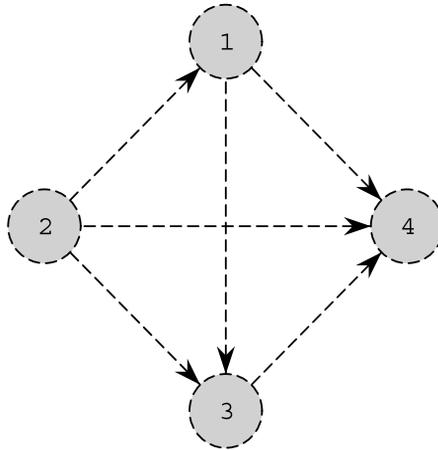
Рис. 3.5. Обобщенная сеть $G^1 = (I^1, U^1)$

Для обобщенной сети $G^1 = (I^1, U^1)$ для первого типа потока, которая изображена на рис. 3.5, представим уравнения вида (2.1.2).

Уравнения (2.1.2) для обобщенной сети $G^1 = (I^1, U^1)$ представлены в виде (3.2.2).

$$\begin{aligned}
 x_{14}^1 + x_{13}^1 - x_{21}^1 &= 2, \\
 x_{24}^1 + x_{23}^1 + x_{21}^1 - &= 14, \\
 x_{34}^1 - \frac{1}{10}x_{23}^1 - \frac{2}{5}x_{13}^1 &= \frac{11}{10}, \\
 -\frac{7}{10}x_{34}^1 - \frac{4}{5}x_{24}^1 - \frac{3}{10}x_{14}^1 &= -\frac{59}{10}.
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Представим уравнения вида (2.1.2) экстремальной неоднородной задачи дробно-линейного программирования (2.1.1) – (2.1.6) для обобщенной сети $G^2 = (I^2, U^2)$ для второго типа потока, которая изображена на рис. 3.6.

Рис. 3.6. Обобщенная сеть $G^2 = (I^2, U^2)$

Имеем разреженную систему линейных уравнений (3.2.3).

$$\begin{aligned}
 x_{14}^2 + x_{13}^2 - \frac{1}{10}x_{21}^2 &= \frac{23}{10}, \\
 x_{24}^2 + x_{23}^2 + x_{21}^2 &= 21, \\
 x_{34}^2 - \frac{1}{5}x_{23}^2 - \frac{1}{10}x_{13}^2 &= \frac{34}{5}, \\
 -\frac{4}{5}x_{34}^2 - \frac{4}{5}x_{24}^2 - \frac{3}{10}x_{14}^2 &= -\frac{107}{10}.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.3}$$

Для обобщенной сети $G^3 = (I^3, U^3)$ (см. рис. 3.7) представим уравнения системы (2.1.2) для третьего типа потока.

Для третьего типа потока имеем разреженную систему линейных алгебраических уравнений вида (3.2.4):

$$\begin{aligned}
 x_{14}^3 + x_{13}^3 - \frac{1}{5}x_{21}^3 &= \frac{44}{5}, \\
 x_{24}^3 + x_{23}^3 + x_{21}^3 &= 18, \\
 x_{34}^3 - \frac{2}{5}x_{23}^3 - \frac{2}{5}x_{13}^3 &= -\frac{3}{5}, \\
 -\frac{9}{10}x_{34}^3 - \frac{3}{5}x_{24}^3 - \frac{1}{5}x_{14}^3 &= -\frac{21}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.4}$$

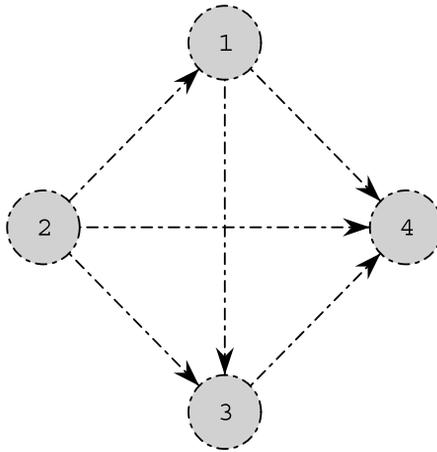


Рис. 3.7. Обобщенная сеть $G^3 = (I^3, U^3)$

Рассмотрим уравнения системы (2.1.3) неоднородной задачи дробно-линейного программирования (2.1.1) – (2.1.6).

Уравнения (2.1.3) отражают взаимосвязи дуговых потоков

$$x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j)$$

для совокупности обобщенных сетей G^1, G^2, G^3 (см. рис. 3.5–3.7).

Представим уравнения вида (2.1.3) экстремальной неоднородной задачи дробно-линейного программирования (2.1.1) – (2.1.6) для совокупности обобщенных сетей $G^k = (I^k, U^k)$, $k \in K = \{1, 2, 3\}$, которые изображены на рис. 3.5–3.7.

Уравнения вида (2.1.3) системы ограничений задачи (2.1.1) – (2.1.6), отражающие взаимосвязи дуговых потоков x_{ij}^k , $(i, j) \in U, k \in K(i, j)$ для совокупности обобщенных сетей $G^k = (I^k, U^k)$, $k \in K = \{1, 2, 3\}$, которые изображены на рис. 3.5–3.7, имеют вид (3.2.5)

$$\begin{aligned}
 & 9x_{13}^1 + x_{13}^2 + 10x_{13}^3 + 5x_{14}^1 + 5x_{14}^2 + \\
 & + 2x_{14}^3 + 8x_{21}^1 + 7x_{21}^3 + x_{23}^1 + 6x_{23}^2 + 7x_{23}^3 + \\
 & + x_{24}^1 + 7x_{24}^2 + 3x_{34}^1 + 4x_{34}^2 + 6x_{34}^3 = 396 \\
 & \hspace{20em} (3.2.5) \\
 & 9x_{13}^1 + 2x_{13}^2 + 4x_{13}^3 + 6x_{14}^1 + 2x_{14}^2 + 9x_{14}^3 + \\
 & + 6x_{21}^1 + 7x_{21}^2 + 6x_{21}^3 + x_{23}^1 + 3x_{23}^2 + 8x_{24}^1 + \\
 & + 8x_{24}^2 + 9x_{24}^3 + 2x_{34}^1 + x_{34}^2 + 10x_{34}^3 = 434.
 \end{aligned}$$

Представим неравенства (2.1.4) системы ограничений неоднородной задачи дробно-линейного программирования (2.1.1) – (2.1.6) для обобщенной мультисети $G = (I, U)$, которая изображена на рис. 3.4. Обобщенная мультисеть $G = (I, U)$ имеет представление в виде совокупности обобщенных сетей $G^k = (I^k, U^k)$, $k \in K = \{1, 2, 3\}$, которые изображены на рис. 3.5–3.7.

Итак, система неравенств (2.1.4) для обобщенной мультисети G , которая изображена на рис. 3.4, имеет вид (3.2.6)

$$\begin{aligned}
 & x_{21}^1 + x_{21}^2 + x_{21}^3 \leq 23, \\
 & x_{21}^1 \geq 0, x_{21}^2 \geq 0, x_{21}^3 \geq 0; \\
 & \hspace{20em} (3.2.6) \\
 & x_{24}^1 + x_{24}^2 + x_{24}^3 \leq 21, \\
 & x_{24}^1 \geq 0, x_{24}^2 \geq 0, x_{24}^3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Неравенства (2.1.5) для мультисети $G = (I, U)$, которая изображена на рис. 3.4, имеют вид (3.2.7)

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_{14}^1 \leq 16, \\ 0 &\leq x_{14}^2 \leq 10, \\ 0 &\leq x_{14}^3 \leq 5, \\ 0 &\leq x_{23}^1 \leq 6. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Неравенства (2.1.6) для мультисети $G = (I, U)$, которая изображена на рис. 3.4, имеют вид (3.2.8)

$$\begin{aligned} x_{13}^1 &\geq 0, \quad x_{13}^2 \geq 0, \quad x_{13}^3 \geq 0, \\ x_{23}^2 &\geq 0, \quad x_{23}^3 \geq 0, \\ x_{34}^1 &\geq 0, \quad x_{34}^2 \geq 0, \quad x_{34}^3 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Пусть $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ — некоторый начальный мультипоток экстремальной неоднородной задачи дробно-линейного программирования (3.2.1) — (3.2.8), который представлен в табл. 3.2.2. Компоненты вектора x удовлетворяют ограничениям (3.2.2) — (3.2.8) экстремальной задачи (3.2.1) — (3.2.8).

Таблица 3.2.2

Начальный мультипоток дробно-линейной задачи (3.2.1) — (3.2.8)

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
x_{ij}^1	$\frac{4320115}{667248}$	0	$\frac{2985619}{667248}$	$\frac{983333}{166812}$	$\frac{807507}{222416}$	$\frac{118973}{27802}$
x_{ij}^2	$\frac{23}{10}$	0	0	$\frac{2931}{160}$	$\frac{429}{160}$	$\frac{1711}{160}$
x_{ij}^3	$\frac{232443689}{53379840}$	5	$\frac{29600297}{10675968}$	$\frac{147697981}{53379840}$	$\frac{332568827}{26689920}$	$\frac{1000239}{4448320}$

На начальном мультипотоке x (см. табл. 3.2.2) вычислим значение дробно-линейной целевой функции:

$$f(x) = \frac{p'x + \beta}{q'x + \gamma} = \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^k}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k + 1} = \frac{13239524688}{36846938753}.$$

Пусть $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ – некоторая опора обобщенной мультисети G экстремальной неоднородной задачи дробно-линейного программирования (3.2.1) – (3.2.8) и пусть $U^* = \emptyset$.

Таблица 3.2.3

Состав множеств $K_S(i, j), K_S^1(i, j), K_S^0(i, j), K_N(i, j), K_N^1(i, j), K_N^0(i, j), (i, j) \in U; U^*$ на первой итерации

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
$K_S(i, j)$	{1,2,3}	\emptyset	{1,3}	{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}
$K_S^1(i, j)$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	{1}	\emptyset	\emptyset
$K_S^0(i, j)$			{1,3}		{1,2,3}	
$K_N(i, j)$	\emptyset	{1,2,3}	{2}	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$K_N^1(i, j)$	\emptyset	{1,2,3}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$K_N^0(i, j)$			{2}		\emptyset	
U^*			\emptyset		\emptyset	
U_B	\emptyset	\emptyset	\emptyset	{1,3}	\emptyset	\emptyset

Состав множеств $K_S(i, j), K_S^1(i, j), K_S^0(i, j), K_N(i, j), K_N^1(i, j), K_N^0(i, j)$ для каждой мультидуги $(i, j) \in U$ и множество U^* на первой итерации представлены в табл. 3.2.3.

Составим опорный мультипоток $\{x, U_S\}$, где мультипоток x приведен в табл. 3.2.2, а опора $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ представлена в табл. 3.2.3.

В рассматриваемой экстремальной неоднородной задаче дробно-линейного программирования (3.2.1) – (3.2.8) опора U_S состоит из опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ обобщенной сети G для разреженной системы (3.2.2) – (3.2.4) и множества бициклических дуг $U_B = \{U_B^k, k \in K\}$.

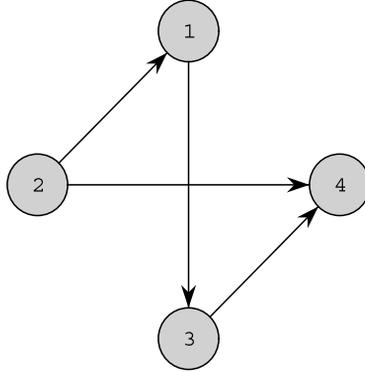


Рис. 3.8. Множество дуг U_L^1 опоры $U_L = \{U_L^1, U_L^2, U_L^3\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (3.2.2)–(3.2.4)

Опора $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ представлена на рис. 3.8–3.10 и состоит из одной компоненты связности для каждого типа потока, где $K = \{1, 2, 3\}$. Единственный цикл каждой компоненты связности опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ является невырожденным. Множество U^* не содержит мультидуг: $U^* = \emptyset$. Множество U_B бициклических дуг

$$U_B = \{U_B^k = U_S^k \setminus U_L^k, k \in K\}, |U_B| = l + |U^*|$$

состоит из $l + |U^*| = 2$ дуг:

$$U_B = \{(2,3)^1, (2,3)^3\}.$$

Выполним произвольную нумерацию множества бициклических дуг:

$$t(2,3)^1 = 1, t(2,3)^3 = 2.$$

Бициклические дуги $(2,3)^1$ и $(2,3)^3$ порождают бициклы B_{23}^1, B_{23}^3 , которым соответствуют характеристические векторы $\delta^1(2,3)$ и $\delta^3(2,3)$.

Полностью система характеристических векторов, построенная относительно опоры $U_L = \{U_L^1, U_L^2, U_L^3\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (3.2.2)–(3.2.4), приведена в табл. 3.2.4.

Формируем матрицу детерминантов D .

$$D = \begin{pmatrix} \Lambda_{2,3}^{1,1} & \Lambda_{2,3}^{3,1} \\ \Lambda_{2,3}^{1,2} & \Lambda_{2,3}^{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{310}{13} & \frac{56}{11} \\ -\frac{71}{4} & -\frac{48}{11} \end{pmatrix}.$$

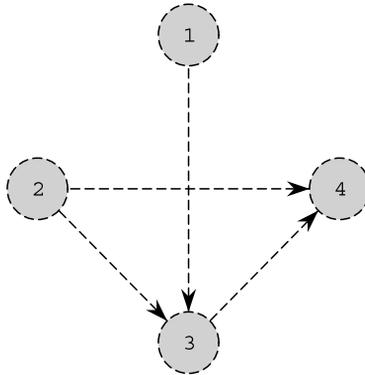


Рис. 3.9. Множество дуг U_L^2 опоры $U_L = \{U_L^1, U_L^2, U_L^3\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (3.2.2)–(3.2.4)

Матрица D^{-1} , которая является обратной к матрице детерминантов D , имеет следующий вид:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \nu_{t(2,3)^1, 1} & \nu_{t(2,3)^1, 2} \\ \nu_{t(2,3)^3, 1} & \nu_{t(2,3)^3, 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{312}{13901} & -\frac{364}{13901} \\ \frac{10153}{111208} & -\frac{1705}{13901} \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$r_1 = -\frac{312}{13901} \Delta^1(2,3) + \frac{10153}{111208} \Delta^3(2,3) = -\frac{10590503015}{36846938753},$$

$$r_2 = -\frac{364}{13901} \Delta^1(2,3) - \frac{1705}{13901} \Delta^3(2,3) = \frac{23461099155}{36846938753}.$$

Для нахождения r_1 и r_2 необходимо вычислить значения $\Delta^1(2,3)$ и $\Delta^3(2,3)$, используя (3.2.9):

$$\Delta^k(\tau, \rho) = \Delta_P^k(\tau, \rho) - f(x) \Delta_Q^k(\tau, \rho), \quad (3.2.9)$$

Значение дробно-линейной целевой функции на начальном мульти-потокке x равно:

$$f(x) = \frac{p'x + \beta}{q'x + \gamma} = \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^k}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k + 1} = \frac{13239524688}{36846938753}.$$

Вычисление $\Delta_P^k(\tau, \rho)$ и $\Delta_Q^k(\tau, \rho)$ выполняется следующим образом:
 $\Delta_P^k(\tau, \rho) = p_{\tau\rho}^k + \sum_{(i,j) \in U_L^k} p_{ij}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho)$, $\Delta_Q^k(\tau, \rho) = q_{\tau\rho}^k + \sum_{(i,j) \in U_L^k} q_{ij}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho)$.

Вычислим $\Delta^1(2,3)$ и $\Delta^3(2,3)$, используя (3.2.9):

$$\Delta^1(2,3) = -\frac{8522370781465}{1916040815156}, \quad \Delta^3(2,3) = -\frac{156290993480}{36846938753}.$$

Таблица 3.2.4

**Характеристические векторы на 1-й итерации
 дробно-линейной задачи (3.2.1) – (3.2.8)**

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
$\delta^1(1,4)$	$-\frac{25}{26}$	1	$\frac{1}{26}$	0	$-\frac{1}{26}$	$-\frac{5}{13}$
$\delta^1(2,3)$	$-\frac{73}{52}$	0	$-\frac{73}{52}$	1	$\frac{21}{52}$	$-\frac{6}{13}$
$\delta^2(1,4)$	-1	1	0	$\frac{11}{32}$	$-\frac{11}{32}$	$-\frac{1}{32}$
$\delta^2(2,1)$	$\frac{1}{10}$	0	1	$-\frac{99}{80}$	$\frac{19}{80}$	$-\frac{19}{80}$
$\delta^3(1,4)$	$-\frac{35}{33}$	1	$-\frac{10}{33}$	0	$\frac{10}{33}$	$-\frac{14}{33}$
$\delta^3(2,3)$	$-\frac{1}{11}$	0	$-\frac{5}{11}$	1	$-\frac{6}{11}$	$\frac{4}{11}$

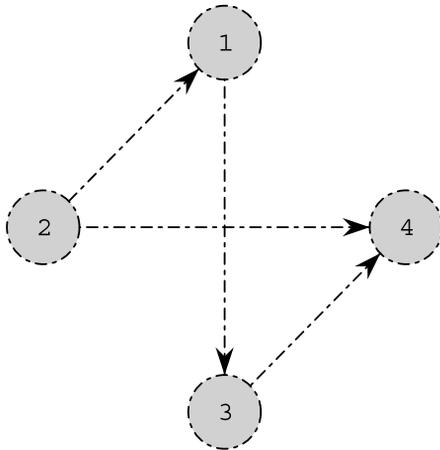


Рис. 3.10. Множество дуг U_L^3 опоры $U_L = \{U_L^1, U_L^2, U_L^3\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (3.2.2)–(3.2.4)

Поскольку $U^* = \emptyset$, то вычислим значения оценок $\bar{\Delta}^k(i, j), (i, j) \in U, k \in K(i, j)$ экстремальной дробно-линейной задачи потокового программирования (3.2.1) – (3.2.8), используя следующие соотношения:

$$\bar{\Delta}^k(\tau, \rho) = \Delta^k(\tau, \rho) - \sum_{p=1}^l r_p \Lambda_{\tau\rho}^{kp}. \quad (3.2.10)$$

Оценки $\bar{\Delta}^k(i, j), (i, j) \in U, k \in K(i, j)$ экстремальной дробно-линейной задачи потокового программирования (3.2.1) – (3.2.8) на 1-й итерации представлены в табл. 3.2.5.

Проверим условия критерия оптимальности (2.8.2) – (2.8.5) на начальном опорном мультипотокe $\{x, U_S\}$.

Мультипоток x представлен в табл. 3.2.2, опора $U_L = \{U_L^1, U_L^2, U_L^3\}$ на 1-й итерации изображена на рис. 3.8–3.10. Опора U_S представлена в табл. 3.2.3. Оценки приведены в табл. 3.2.5.

Выберем дугу $(i_0, j_0)^{k_0} = (1, 4)^3$, на которой не выполняются условия (2.8.2) критерия оптимальности, где $k_0 = 3, k_0 \in K_N^1(1, 4)$, и положим $y_{14}^3 = -1$.

Отметим компоненты подходящего направления $y_{ij}^k, k \in K(i, j), (i, j) \in U$, которые заведомо равны нулю:

Таблица 3.2.5

Оценки на 1-й итерации для дробно-линейной задачи (3.2.1) – (3.2.8)

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
$\bar{\Delta}^1(i, j)$	0	$-\frac{84465540635}{36846938753}$	0	0	0	0
$\bar{\Delta}^2(i, j)$	0	$-\frac{20792329185}{147387755012}$	$-\frac{1418888785461}{147387755012}$	0	0	0
$\bar{\Delta}^3(i, j)$	0	$-\frac{197778786690}{36846938753}$	0	0	0	0

- $y_{ij}^k, k \in K(i, j), (i, j) \in U$ для $k = 2$ равны нулю, поскольку бициклические дуги $(2,3)^1, (2,3)^3$ и дуга $(i_0, j_0)^{k_0} = (1,4)^3$, для которой нарушены условия оптимальности (выбрана для варьирования на текущей итерации) не принадлежат множеству дуг обобщенной сети $G^2 = (I^2, U^2)$, а также в силу того, что используется симплексная нормировка [1];
- неопорные компоненты $y_{ij}^k, k \in K_N(i, j), (i, j) \in U$, кроме компоненты $y_{i_0, j_0}^{k_0} = y_{14}^3$, равны нулю, поскольку применяется симплексная нормировка.

С учетом указанных нулевых компонент подходящего направления $y = (y_{ij}^k, k \in K(i, j), (i, j) \in U)$ составим линейную систему для вычисления компонент $y_{ij}^k, k \in K_S(i, j), (i, j) \in U; y_{i_0, j_0}^{k_0}$ подходящего направления y .

$$y_{13}^1 - y_{21}^1 = 0,$$

$$y_{21}^1 + y_{23}^1 + y_{24}^1 = 0,$$

$$y_{34}^1 - \frac{2}{5} y_{13}^1 - \frac{1}{10} y_{23}^1 = 0, \quad (3.2.11)$$

$$-\frac{4}{5} y_{24}^1 - \frac{7}{10} y_{34}^1 = 0;$$

Компоненты $y_{ij}^k, k \in K_S(i, j), (i, j) \in U; y_{i_0j_0}^{k_0}$ подходящего направления $y = (y_{ij}^k, k \in K(i, j), (i, j) \in U)$ изменения мультипотока x удовлетворяют разреженной системе линейных алгебраических уравнений (3.2.11) – (3.2.14).

$$\begin{aligned} y_{13}^3 + y_{14}^3 - \frac{1}{5} y_{21}^3 &= 0, \\ y_{24}^3 + y_{23}^3 + y_{21}^3 &= 0, \\ y_{34}^3 - \frac{2}{5} y_{23}^3 - \frac{2}{5} y_{13}^3 &= 0, \\ -\frac{9}{10} y_{34}^3 - \frac{3}{5} y_{24}^3 - \frac{1}{5} y_{14}^3 &= 0; \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

$$\begin{aligned} 9y_{13}^1 + 10y_{13}^3 + 2y_{14}^3 + 8y_{21}^1 + 7y_{21}^3 + y_{23}^1 + \\ + 7y_{23}^3 + y_{24}^1 + 3y_{34}^1 + 6y_{34}^3 &= 0, \\ 9y_{13}^1 + 4y_{13}^3 + 9y_{14}^3 + 6y_{21}^1 + 6y_{21}^3 + y_{23}^1 + \\ + 8y_{24}^1 + 9y_{24}^3 + 2y_{34}^1 + 10y_{34}^3 &= 0; \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

$$y_{14}^3 = -1. \tag{3.2.14}$$

Применяя принципы декомпозиции опоры U_S обобщенной мультисети $G = (I, U)$ для рассматриваемой экстремальной задачи дробно-линейного программирования (3.2.1) – (3.2.8) и теоретико-графовые свойства опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (3.2.11) – (3.2.12), приведем эффективный алгоритм решения разреженной системы (3.2.11) – (3.2.14) вычисления компонент вектора

$$(y_{ij}^k, k \in K_S(i, j), (i, j) \in U; y_{i_0j_0}^{k_0}).$$

На основании бицикла $B_{i_0j_0}^{k_0}$, порожденного дугой $(i_0, j_0)^{k_0}$ относительно множества дуг опоры $U_L^{k_0}$ сети $G^{k_0} = (I^{k_0}, U^{k_0})$, где

$$(i_0, j_0)^{k_0} = (1, 4)^3, U_L^{k_0} = U_L^3, G^{k_0} = (I^3, U^3),$$

сформируем вектор

$$-\begin{pmatrix} \Lambda_{i_0 j_0}^{k_0,1} \operatorname{sgn}(\bar{\Delta}^{k_0}(i_0, j_0)) \\ \Lambda_{i_0 j_0}^{k_0,2} \operatorname{sgn}(\bar{\Delta}^{k_0}(i_0, j_0)) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \Lambda_{1,4}^{3,1} \operatorname{sgn}(\bar{\Delta}^3(1,4)) \\ \Lambda_{1,4}^{3,2} \operatorname{sgn}(\bar{\Delta}^3(1,4)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{146}{11} \\ \frac{47}{33} \end{pmatrix}$$

Составим систему (3.2.15) для вычисления компонент y_{23}^1, y_{23}^3 вектора y , соответствующих бициклическим дугам $(2,3)^1, (2,3)^3$.

$$D \begin{pmatrix} y_{23}^1 \\ y_{23}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{146}{11} \\ \frac{47}{33} \end{pmatrix}. \quad (3.2.15)$$

На основании теоремы 2.2.1 матрица детерминантов D системы (3.2.15), построенная по опоре $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ (см. табл. 3.2.3), является невырожденной. Из системы (3.2.15) однозначно вычислим компоненты y_{23}^1, y_{23}^3 , которые соответствуют бициклическим дугам $(2,3)^1, (2,3)^3$,

$$\begin{pmatrix} y_{23}^1 \\ y_{23}^3 \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{146}{11} \\ \frac{47}{33} \end{pmatrix},$$

где

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{312}{13901} & -\frac{364}{13901} \\ \frac{10153}{111208} & -\frac{1705}{13901} \end{pmatrix}.$$

Подставим в систему (3.2.11) – (3.2.14) вычисленные значения компонент y_{23}^1, y_{23}^3 , которые соответствуют бициклическим дугам $(2,3)^1, (2,3)^3$. Получим разреженную систему линейных алгебраических уравнений блочно-диагонального вида, неизвестные которой соответствуют дугам $\{U_L^k, k = 1, 3\}$ опоры $U_L = \{U_L^k, k = \overline{1, 3}\}$ обобщенной

мультисети G для разреженной системы (3.2.11) – (3.2.12). Множества дуг $\{U_L^k, k \in K = \{1, 2, 3\}\}$ опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ представлены на рис. (3.8) – (3.10).

Таблица 3.2.6

Подходящее направление изменения мультипотока
на 1-й итерации

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
y_{ij}^1	$-\frac{15257}{41703}$	0	$-\frac{15257}{41703}$	$\frac{10868}{41703}$	$\frac{1463}{13901}$	$-\frac{1672}{13901}$
y_{ij}^2	0	0	0	0	0	0
y_{ij}^3	$\frac{197947}{166812}$	-1	$\frac{155675}{166812}$	$-\frac{231277}{166812}$	$\frac{37801}{83406}$	$-\frac{1111}{13901}$

Для вычисления неизвестных системы (3.2.11) – (3.2.12), которые являются компонентами векторов

$$y(U_L^k) = (y_{ij}^k, (i, j)^k \in U_L^k), k = 1, 3,$$

применим корневые структуры [20, 41], которые позволяют вычислить компоненты вектора $y(U_L^k) = (y_{ij}^k, (i, j)^k \in U_L^k)$, соответствующие дугам множества U_L^k опоры U_L за число операций $O(n)$ в наихудшем случае, где $n = |I^k|$, $G^k = (I^k, U^k)$, $k = 1, 3$.

Компоненты вектора y представлены в табл. 3.2.6.

Выберем максимально возможный шаг θ_0 изменения мультипотока x вдоль построенного подходящего направления y . Максимально возможные шаги изменения компонент мультипотока x (см. табл. 3.2.2) вдоль подходящего направления y (см. табл. 3.2.6) на первой итерации представлены в табл. 3.2.7. Шаг θ_0 достигнут на дуге $(i_*, j_*)^{k_*} = (2, 3)^1$.

$$\theta_0 = \theta_{23}^1 = \frac{17539}{43472}.$$

Построим новый мультипоток x на второй итерации (см. табл. 3.2.8). Выполним операции по замене опоры.

Таблица 3.2.7

**Максимально возможные шаги вдоль подходящего
направления изменения мультипотока на первой итерации**

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
θ_{ij}^1	$\frac{4320115}{244112}$	∞	$\frac{2985619}{244112}$	$\frac{17539}{43472}$	∞	$\frac{118973}{3344}$
θ_{ij}^2	∞	∞	∞	∞	∞	∞
θ_{ij}^3	∞	5	∞	$\frac{147697981}{74008640}$	∞	$\frac{10002397}{355520}$
θ_{ij}			$\frac{56059021}{2019136}$		$\frac{11891261}{2981056}$	

Новая опора $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$, $U_S^k = U_L^k \cup U_B^k$ обобщенной мультисети G экстремальной неоднородной задачи дробно-линейного программирования (3.2.1) – (3.2.8) приведена в табл. 3.2.9.

Таблица 3.2.8

Мультипоток на второй итерации

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
x_{ij}^1	$\frac{329}{52}$	0	$\frac{225}{52}$	6	$\frac{191}{52}$	$\frac{55}{13}$
x_{ij}^2	$\frac{23}{10}$	0	0	$\frac{2931}{160}$	$\frac{429}{160}$	$\frac{1711}{160}$
x_{ij}^3	$\frac{16808991}{3477760}$	$\frac{199821}{43472}$	$\frac{168491}{53504}$	$\frac{7677339}{3477760}$	$\frac{21985213}{1738880}$	$\frac{175179}{79040}$

В рассматриваемой экстремальной неоднородной задаче дробно-линейного программирования (3.2.1) – (3.2.8) новая опора U_S состоит из опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ обобщенной сети G для разреженной системы (3.2.2) – (3.2.4) и множества бициклических дуг $U_B = \{U_B^k, k \in K\}$. Опора U_L состоит из одной компоненты связности для каждого типа

потока $k \in K = \{1, 2, 3\}$. Опора $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ представлена на рис. 3.11–3.13. Единственный цикл каждой компоненты связности опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ является невырожденным. Множество U^* не содержит мультидуг: $U^* = \emptyset$. Множество U_B бициклических дуг состоит из $l + |U^*| = 2$ дуг $U_B = \{(1,4)^3, (2,3)^3\}$.

Множество опорных дуг $\{U_S^k, k \in K\}$, $K = \{1, 2, 3\}$, на второй итерации представлено в табл. 3.2.9.

Итак, в состав множества U_S^1 не входят бициклические дуги: $U_B^1 = \emptyset$. Следовательно, $U_S^1 = U_L^1$, $U_L^1 = \{(1,3)^1, (2,1)^1, (2,4)^1, (3,4)^1\}$ (см. рис. 3.11). Множество опорных дуг U_S^2 также не содержит бициклических дуг: $U_B^2 = \emptyset$. Значит, $U_S^2 = U_L^2$, $U_L^2 = \{(1,3)^2, (2,3)^2, (2,4)^2, (3,4)^2\}$ (см. рис. 3.12). Опору U_S^3 составляют бициклические дуги $U_B^3 = \{(1,4)^3, (2,3)^3\}$ и дуги множества $U_L^3 = \{(1,3)^3, (2,1)^3, (2,4)^3, (3,4)^3\}$. Дуги множества U_L^3 представлены на рис. 3.13.

Выполним нумерацию дуг множества U_B :

$$t(1,4)^3 = 1, \quad t(2,3)^3 = 2.$$

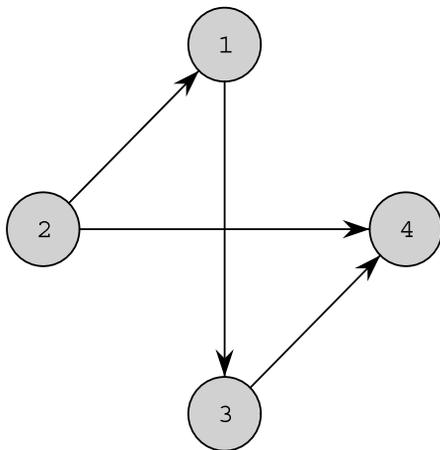


Рис. 3.11. Множество дуг U_L^1 опоры $U_L = \{U_L^1, U_L^2, U_L^3\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (3.2.2) – (3.2.4) на второй итерации

Для экстремальной неоднородной задачи потокового программирования (3.2.1) – (3.2.8) вычислим значение дробно-линейной целевой функции (3.2.1) на мультипотокке x .

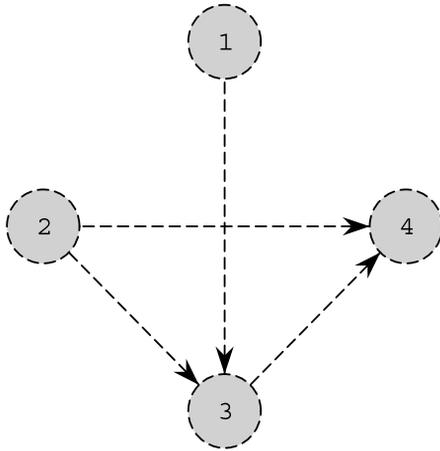


Рис. 3.12. Множество дуг U_L^2 опоры $U_L = \{U_L^1, U_L^2, U_L^3\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (3.2.2) – (3.2.4) на второй итерации

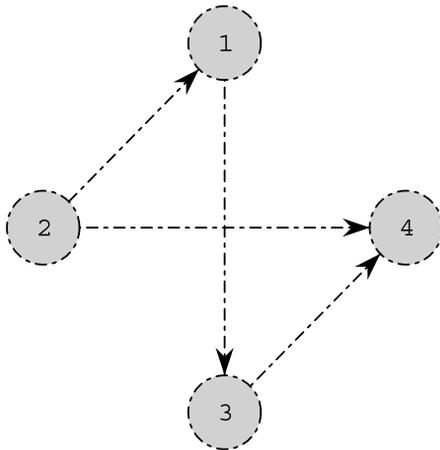


Рис. 3.13. Множество дуг U_L^3 опоры $U_L = \{U_L^1, U_L^2, U_L^3\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (3.2.2) – (3.2.4) на второй итерации

Таблица 3.2.9

Состав множеств $K_S(i, j)$, $K_S^1(i, j)$, $K_S^0(i, j)$, $K_N(i, j)$, $K_N^1(i, j)$, $K_N^0(i, j)$, $(i, j) \in U$; U^* на второй итерации

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
$K_S(i, j)$	{1,2,3}	{3}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}
$K_S^1(i, j)$	\emptyset	{3}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$K_S^0(i, j)$			{1,3}		{1,2,3}	
$K_N(i, j)$	\emptyset	{1,2}	{2}	{1}	\emptyset	\emptyset
$K_N^1(i, j)$	\emptyset	{1,2}	\emptyset	{1}	\emptyset	\emptyset
$K_N^0(i, j)$			{2}		\emptyset	
U^*			\emptyset		\emptyset	
U_B	\emptyset	{3}	\emptyset	{3}	\emptyset	\emptyset

Мультипоток x представлен в табл. 3.2.8.

$$f(x) = \frac{p'x + \beta}{q'x + \gamma} = \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^k}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k + 1} = \frac{288985184}{800781629}.$$

В табл. 3.2.10 представлена система характеристических векторов на второй итерации, построенная относительно опоры $U_L = \{U_L^1, U_L^2, U_L^3\}$ (см. рис. 3.11–3.13).

Для экстремальной задачи (3.2.1) – (3.2.8) вычисленные значения оценок на второй итерации удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\bar{\Delta}^1(1, 4) > 0, \quad \bar{\Delta}^2(1, 4) < 0,$$

$$\bar{\Delta}^2(2, 1) < 0, \quad \bar{\Delta}^1(2, 3) > 0.$$

Проверим условия критерия оптимальности (2.8.2) – (2.8.5) на опорном мультипоточе $\{x, U_S\}$, где мультипоток x представлен в табл. 3.2.8,

Таблица 3.2.10

Характеристические векторы на второй итерации

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
$\delta(1,4)^1$	$-\frac{25}{26}$	1	$\frac{1}{26}$	0	$-\frac{1}{26}$	$-\frac{5}{13}$
$\delta(2,3)^1$	$-\frac{73}{52}$	0	$-\frac{73}{52}$	1	$\frac{21}{52}$	$-\frac{6}{13}$
$\delta(1,4)^2$	-1	1	0	$\frac{11}{32}$	$-\frac{11}{32}$	$-\frac{1}{32}$
$\delta(2,1)^2$	$\frac{1}{10}$	0	1	$-\frac{99}{80}$	$\frac{19}{80}$	$-\frac{19}{80}$
$\delta(1,4)^3$	$-\frac{35}{33}$	1	$-\frac{10}{33}$	0	$\frac{10}{33}$	$-\frac{14}{33}$
$\delta(2,3)^3$	$-\frac{1}{11}$	0	$-\frac{5}{11}$	1	$-\frac{6}{11}$	$\frac{4}{11}$

опора $U_L = \{U_L^1, U_L^2, U_L^3\}$ изображена на рис. 3.11 – 3.13 и опора U_S представлена в табл. 3.2.9. Условия критерия оптимальности не выполняются. Выберем дугу $(i_0, j_0)^{k_0} = (1,4)^1$, на которой не выполняются условия (2.8.2) критерия оптимальности, $k_0 = 1, k_0 \in K_N^1(1,4)$. Положим $y_{14}^1 = 1$. Отметим компоненты подходящего направления $y_{ij}^k, k \in K(i, j), (i, j) \in U$, которые заведомо равны нулю:

- $y_{ij}^k, k \in K(i, j), (i, j) \in U$ для $k = 2$ равны нулю, поскольку бициклические дуги $(1,4)^3, (2,3)^3$ и дуга $(i_0, j_0)^{k_0} = (1,4)^1$, для которой нарушены условия оптимальности (выбрана для варьирования на текущей итерации) не принадлежат множеству дуг обобщенной сети $G^2 = (I^2, U^2)$, а также в силу того, что используется симплексная нормировка;
- неопорные компоненты $y_{ij}^k, k \in K_N(i, j), (i, j) \in U$, кроме компоненты $y_{i_0, j_0}^{k_0} = y_{14}^1$, равны нулю, поскольку применяется симплексная нормировка.

Сформируем разреженную систему линейных алгебраических уравнений для определения подходящего направления y изменения мультипотока $x = (x_{ij}^k, k \in K(i, j), (i, j) \in U)$ на второй итерации.

Мультипоток $x = (x_{ij}^k, k \in K(i, j), (i, j) \in U)$ на второй итерации представлен в табл. 3.2.8.

Итак, компоненты $y_{ij}^k, k \in K_S(i, j), (i, j) \in U; y_{i_0 j_0}^{k_0}$ подходящего направления $y = (y_{ij}^k, k \in K(i, j), (i, j) \in U)$ изменения мультипотока $x = (x_{ij}^k, k \in K(i, j), (i, j) \in U)$ удовлетворяют разреженной системе линейных алгебраических уравнений (3.2.16) – (3.2.19).

$$y_{13}^1 + y_{14}^1 - y_{21}^1 = 0,$$

$$y_{21}^1 + y_{24}^1 = 0,$$

$$y_{34}^1 - \frac{2}{5}y_{13}^1 = 0, \tag{3.2.16}$$

$$-\frac{3}{10}y_{14}^1 - \frac{4}{5}y_{24}^1 - \frac{7}{10}y_{34}^1 = 0;$$

$$y_{13}^3 + y_{14}^3 - \frac{1}{5}y_{21}^3 = 0,$$

$$y_{24}^3 + y_{23}^3 + y_{21}^3 = 0,$$

$$y_{34}^3 - \frac{2}{5}y_{23}^3 - \frac{2}{5}y_{13}^3 = 0, \tag{3.2.17}$$

$$-\frac{9}{10}y_{34}^3 - \frac{3}{5}y_{24}^3 - \frac{1}{5}y_{14}^3 = 0.$$

Для совокупности обобщенных сетей G^1, G^2, G^3 , представленных на рис. 3.5–3.7, рассмотрим уравнения системы (2.1.3) неоднородной задачи дробно-линейного программирования (2.1.1) – (2.1.6), которые отражают взаимосвязи дуговых потоков $x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j)$. Для подходящего направления y также справедливы равенства, которые отражают взаимосвязь компонент $y_{ij}^k, k \in K(i, j), (i, j) \in U$ для совокупности обобщенных сетей $G^k = (I^k, U^k), k \in K = \{1, 2, 3\}$, которые изображены на рис. 3.5–3.7.

Итак, имеем систему линейных алгебраических уравнений общего вида (3.2.18). Отметим, что в системе (3.2.18) учтены компоненты вектора y , которые заведомо равны нулю.

$$\begin{aligned} & 9y_{13}^1 + 10y_{13}^3 + 5y_{14}^1 + 2y_{14}^3 + \\ & + 8y_{21}^1 + 7y_{21}^3 + 7y_{23}^3 + y_{24}^1 + \\ & + 3y_{34}^1 + 6y_{34}^3 = 0, \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

$$\begin{aligned} & 9y_{13}^1 + 4y_{13}^3 + 6y_{14}^1 + 9y_{14}^3 + \\ & + 6y_{21}^1 + 6y_{21}^3 + 8y_{24}^1 + \\ & + 8y_{24}^3 + 9y_{24}^3 + 2y_{34}^1 + 10y_{34}^3 = 0, \end{aligned}$$

$$y_{14}^1 = 1. \tag{3.2.19}$$

Приведем эффективный алгоритм вычисления компонент подходящего направления y . Из системы

$$D \begin{pmatrix} y_{14}^3 \\ y_{23}^3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\frac{59}{13} \\ \frac{7}{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

однозначно вычислим компоненты y_{14}^3, y_{23}^3 , соответствующие бициклическим дугам $(1,4)^3, (2,3)^3$:

$$\begin{pmatrix} y_{14}^3 \\ y_{23}^3 \end{pmatrix} = -D^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{59}{13} \\ \frac{7}{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

где

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{209} & -\frac{21}{209} \\ -\frac{47}{1672} & -\frac{219}{836} \end{pmatrix}.$$

Таблица 3.2.11

**Подходящее направление изменения мультипотока
на второй итерации**

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
y_{ij}^1	$-\frac{25}{26}$	1	$\frac{1}{26}$	0	$-\frac{1}{26}$	$-\frac{5}{13}$
y_{ij}^2	0	0	0	0	0	0
y_{ij}^3	$\frac{9591}{10868}$	$-\frac{4035}{5434}$	$\frac{585}{836}$	$-\frac{11351}{10868}$	$\frac{1873}{5434}$	$-\frac{16}{247}$

Для вычисления опорных компонент вектора y , которые соответствуют дугам множеств $U_L^k, k = 1, 2, 3$, необходимо для каждой дуги $(\tau, \rho)^k \in U_B$ и для дуги $(i_0, j_0)^{k_0}$, где $(i_0, j_0)^{k_0} = (1, 4)^1$, выполнить следующие действия:

- построить в бицикле $B_{\tau\rho}^k = U_L^k \cup (\tau, \rho)^k$ единственные цепи от начала τ и конца ρ бициклической дуги $(\tau, \rho)^k$ (или в бицикле $B_{i_0, j_0}^{k_0} = U_L^{k_0} \cup (i_0, j_0)^{k_0}$ от начала i_0 и конца j_0 дуги $(i_0, j_0)^{k_0}$) до соответствующих узлов невырожденного цикла (невырожденных циклов) и вычислить компоненты вектора y , которые соответствуют дугам этих цепей;
- для каждой дуги невырожденного цикла (невырожденных циклов) опоры U_L^k сетевой части задачи вычислить компоненты вектора y , которые соответствуют дугам указанного невырожденного цикла (невырожденных циклов).

Компоненты вектора y представлены в табл. 3.2.11. Вычислим максимально возможный шаг θ_0 изменения мультипотока x вдоль построенного подходящего направления y .

$$\theta_0 = \theta_{23}^3 = \frac{7677339}{3632320}.$$

Построим мультипоток x на второй итерации (см. табл. 3.2.12). Выполним операции по замене опоры.

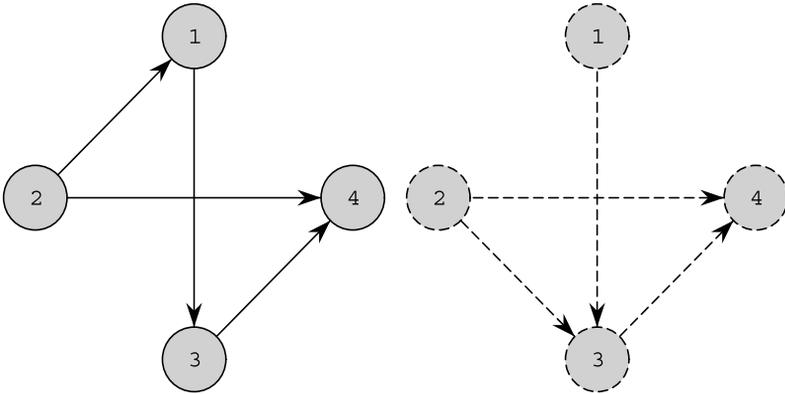


Рис. 3.14. Множества дуг U_L^1 и U_L^2 оптимальной опоры $U_L = \{U_L^1, U_L^2, U_L^3\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (3.2.2) – (3.2.4)

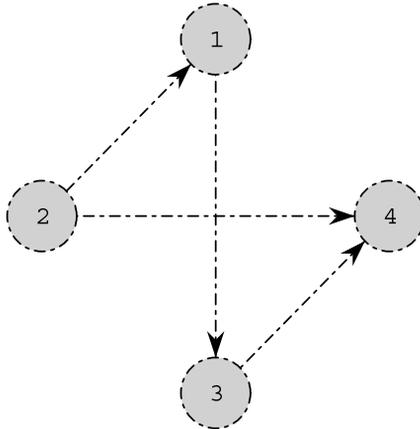


Рис. 3.15. Множество дуг U_L^3 оптимальной опоры $U_L = \{U_L^1, U_L^2, U_L^3\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (3.2.2) – (3.2.4)

Таблица 3.2.12

Оптимальный мультипоток для примера (3.2.1) – (3.2.8)

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
x_{ij}^1	$\frac{6239741}{1452928}$	$\frac{7677339}{3632320}$	$\frac{32024103}{7264640}$	6	$\frac{26093017}{7264640}$	$\frac{2482937}{726464}$
x_{ij}^2	$\frac{23}{10}$	0	0	$\frac{2931}{160}$	$\frac{429}{160}$	$\frac{1711}{160}$
x_{ij}^3	$\frac{9732507}{1452928}$	$\frac{4398135}{1452928}$	$\frac{3362189}{726464}$	0	$\frac{9714163}{726464}$	$\frac{1510623}{726464}$

В состав множества U_B^1 бициклических дуг оптимальной опоры U_S первого типа потока входит одна бициклическая дуга: $U_B^1 = \{(1,4)^1\}$. Множество U_L^1 , состоит из дуг:

$$U_L^1 = \{(1,3)^1, (2,1)^1, (2,4)^1, (3,4)^1\}.$$

Множество дуг U_L^1 представлено на рис. 3.14.

Множество дуг оптимальной опоры второго типа потока не содержит бициклических дуг: $U_B^2 = \emptyset$. В состав множества U_L^2 , которое представлено на рис. 3.14, входят дуги: $U_L^2 = \{(1,3)^2, (2,3)^2, (2,4)^2, (3,4)^2\}$.

Оптимальную опору для третьего типа потока составляют бициклические дуги $U_B^3 = \{(1,4)^3\}$ и дуги множества $U_L^3 = \{(1,3)^3, (2,1)^3, (2,4)^3, (3,4)^3\}$. Дуги множества U_L^3 представлены на рис. 3.15.

В табл. 3.2.13 представлена система характеристических векторов, построенная относительно оптимальной опоры $U_L = \{U_L^1, U_L^2, U_L^3\}$. Оптимальная опора U_L изображена на рис. 3.14–3.15.

Вычислим оценки:

$$\bar{\Delta}^2(1,4), \bar{\Delta}^2(2,1), \bar{\Delta}^1(2,3), \bar{\Delta}^3(2,3).$$

Значения оценок удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\bar{\Delta}^2(1,4) < 0,$$

$$\bar{\Delta}^2(2,1) < 0,$$

Таблица 3.2.13

Характеристические векторы для оптимальной опоры U_L

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
$\delta^1(1,4)$	$-\frac{25}{26}$	1	$\frac{1}{26}$	0	$-\frac{1}{26}$	$-\frac{5}{13}$
$\delta^1(2,3)$	$-\frac{73}{52}$	0	$-\frac{73}{52}$	1	$\frac{21}{52}$	$-\frac{6}{13}$
$\delta^2(1,4)$	-1	1	0	$\frac{11}{32}$	$-\frac{11}{32}$	$-\frac{1}{32}$
$\delta^2(2,1)$	$\frac{1}{10}$	0	1	$-\frac{99}{80}$	$\frac{19}{80}$	$-\frac{19}{80}$
$\delta^3(1,4)$	$-\frac{35}{33}$	1	$-\frac{10}{33}$	0	$\frac{10}{33}$	$-\frac{14}{33}$
$\delta^3(2,3)$	$-\frac{1}{11}$	0	$-\frac{5}{11}$	1	$-\frac{6}{11}$	$\frac{4}{11}$

$$\bar{\Delta}^1(2, 3) > 0,$$

$$\bar{\Delta}^3(2, 3) < 0.$$

На опорном мультипоточе $\{x, U_S\}$ условия критерия оптимальности (2.8.2) – (2.8.5) выполнены, где оптимальный мультипоток x представлен в табл. 3.2.12, оптимальная опора $U_L = \{U_L^1, U_L^2, U_L^3\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (3.2.2) – (3.2.4) изображена на рис. 3.14 – 3.15. Характеристики оптимальной опоры U_S представлены в табл. 3.2.14, где $U_S = \{U_S^k, k \in K\}$, $K = \{1, 2, 3\}$.

На оптимальном мультипоточе x (см. табл. 3.2.12) значение дробно-линейной целевой функции (3.2.1) равно

$$f(x) = \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^k + \beta}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k + \gamma} = \frac{606531404}{1668680559}.$$

Таблица 3.2.14

Характеристики оптимальной опоры

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
$K_S(i, j)$	{1,2,3}	{1,3}	{1,3}	{2}	{1,2,3}	{1,2,3}
$K_S^1(i, j)$	\emptyset	{1,3}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$K_S^0(i, j)$			{1,3}		{1,2,3}	
$K_N(i, j)$	\emptyset	{2}	{2}	{1,3}	\emptyset	\emptyset
$K_N^1(i, j)$	\emptyset	{2}	\emptyset	{1}	\emptyset	\emptyset
$K_N^0(i, j)$			{2}		\emptyset	
U^*			\emptyset		\emptyset	
U_B	\emptyset	{1,3}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset

3.3. Пример 3

Рассмотрим математическую модель неоднородной задачи дробно-линейного потокового программирования вида (2.1.1) – (2.1.6) для обобщенной мультисети $G = (I, U)$, которая изображена на рис. 3.16.

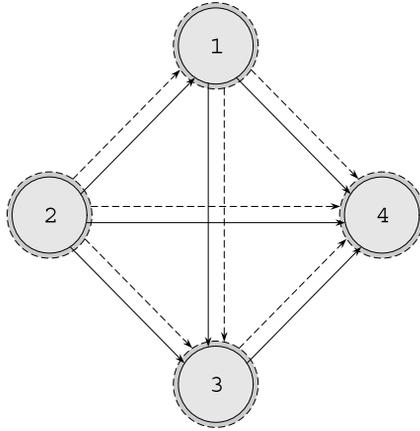
Пусть $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ – некоторый мультипоток экстремальной неоднородной задачи дробно-линейного программирования, математическая модель которой имеет вид (2.1.1) – (2.1.6). Это означает, что компоненты вектора x удовлетворяют ограничениям (2.1.2) – (2.1.6) экстремальной задачи (2.1.1) – (2.1.6).

Обобщенную мультисеть $G = (I, U)$ представим в виде двух обобщенных сетей G^1 и G^2 .

Обобщенные сети G^1 и G^2 изображены на рис. 3.17–3.18.

Характеристики обобщенной мультисети $G = (I, U)$ (см. рис. 3.16) и соответствующих обобщенных сетей G^1, G^2 которые изображены на рис. 3.17–3.18, представлены в табл. 3.3.1.

Представим математическую модель неоднородной задачи дробно-линейного потокового программирования вида (2.1.1) – (2.1.6) для обобщенной мультисети $G = (I, U)$ (см. рис. 3.16).

Рис. 3.16. Обобщенная мультисеть $G = (I, U)$

Для обобщенной мультисети $G = (I, U)$ (см. рис. 3.16) дробно-линейная целевая функция имеет вид (3.3.1)

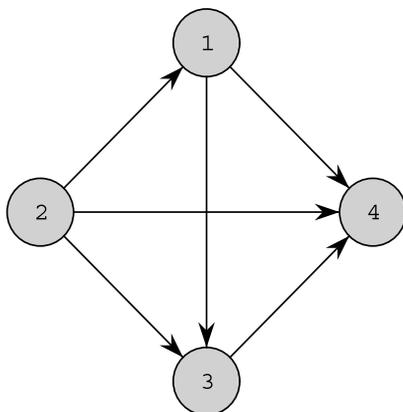
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^k + \beta}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k + \gamma} \rightarrow \max, \quad (3.3.1)$$

$$\beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

где

$$p(x) = 4x_{13}^1 + \frac{1}{4}x_{13}^2 + \frac{10}{3}x_{14}^1 + \frac{2}{9}x_{14}^2 + x_{21}^1 + \frac{1}{5}x_{21}^2 + \frac{1}{5}x_{23}^1 + \\ + \frac{2}{11}x_{23}^2 + \frac{7}{12}x_{24}^2 + \frac{5}{7}x_{34}^1 + \frac{6}{13}x_{34}^2,$$

$$q(x) = \frac{9}{7}x_{13}^1 + \frac{3}{5}x_{13}^2 + \frac{22}{3}x_{14}^1 + \frac{4}{7}x_{14}^2 + \frac{7}{8}x_{21}^1 + \frac{6}{11}x_{21}^2 + \frac{11}{17}x_{23}^1 + \\ + \frac{12}{23}x_{23}^2 + \frac{5}{9}x_{24}^1 + \frac{17}{24}x_{24}^2 + \frac{15}{19}x_{34}^1 + \frac{16}{25}x_{34}^2.$$

Рис. 3.17. Обобщенная сеть $G^1 = (I^1, U^1)$

Для совокупности обобщенных сетей $G^k = (I^k, U^k)$, $k \in K = \{1, 2\}$, которые изображены на рис. 3.17–3.18, представим уравнения вида (2.1.2) математической модели (2.1.1)–(2.1.6).

Получим разреженную систему линейных алгебраических уравнений (3.3.2)–(3.3.3).

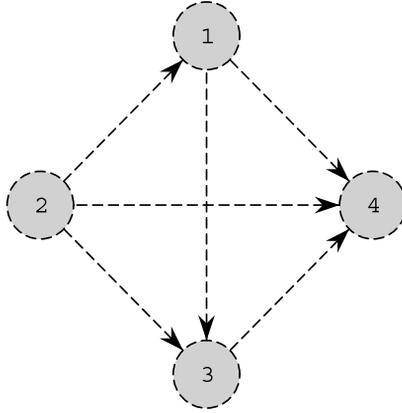
$$x_{14}^1 + x_{13}^1 - \frac{9}{10} x_{21}^1 = \frac{42}{5},$$

$$x_{24}^1 + x_{23}^1 + x_{21}^1 = 14,$$

$$x_{34}^1 - \frac{9}{10} x_{23}^1 - \frac{3}{10} x_{13}^1 = \frac{36}{5},$$

(3.3.2)

$$-\frac{1}{10} x_{34}^1 - \frac{7}{10} x_{24}^1 - \frac{9}{10} x_{14}^1 = -\frac{153}{10}.$$

Рис. 3.18. Обобщенная сеть $G^2 = (I^2, U^2)$

$$x_{14}^2 + x_{13}^2 - \frac{9}{10}x_{21}^2 = \frac{46}{5},$$

$$x_{24}^2 + x_{23}^2 + x_{21}^2 = 11,$$

$$x_{34}^2 - \frac{3}{5}x_{23}^2 - \frac{4}{5}x_{13}^2 = \frac{9}{5},$$

(3.3.3)

$$-\frac{9}{10}x_{34}^2 - \frac{1}{10}x_{24}^2 - \frac{1}{2}x_{14}^2 = -10.$$

Взаимосвязи дуговых потоков x_{ij}^k , $(i, j) \in U$, $k \in K(i, j)$ дробно-линейной экстремальной неоднородной задачи потокового программирования (2.1.1) – (2.1.6) представлены уравнениями (2.1.3).

Для совокупности обобщенных сетей $G^k = (I^k, U^k)$, $k \in K = \{1, 2\}$, которые изображены на рис. 3.17–3.18, представим уравнения (2.1.3).

Таблица 3.3.1

Характеристики обобщенной мультисети (см. рис. 3.16)

(i, j)	(1,3)		(1,4)		(2,1)		(2,3)		(2,4)		(3,4)	
k	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
U^k	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
U_1^k			+	+			+					
U_0					+				+			
$K(i, j)$	{1,2}		{1,2}		{1,2}		{1,2}		{1,2}		{1,2}	
$K_1(i, j)$	∅		{1,2}		∅		{1}		∅		∅	
$K_0(i, j)$					{1,2}				{1,2}			

Итак, для взаимосвязи дуговых потоков $x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j)$ имеем уравнения (3.3.4).

$$\begin{aligned}
 &x_{13}^1 + 8x_{13}^2 + x_{14}^1 + 4x_{14}^2 + 8x_{21}^1 + 6x_{21}^2 + 4x_{23}^1 + 2x_{23}^2 + \\
 &\quad + 9x_{24}^1 + 9x_{24}^2 + x_{34}^1 + 3x_{34}^2 = 320,
 \end{aligned}
 \tag{3.3.4}$$

$$\begin{aligned}
 &x_{13}^1 + 6x_{13}^2 + 4x_{14}^1 + 5x_{14}^2 + 3x_{21}^1 + 7x_{21}^2 + 10x_{23}^1 + 6x_{23}^2 + \\
 &\quad + 5x_{24}^1 + 8x_{24}^2 + 2x_{34}^1 + 9x_{34}^2 = 342.
 \end{aligned}$$

Начальный мультипоток приведен в табл. 3.3.2.

Таблица 3.3.2

Начальный мультипоток

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
x_{ij}^1	$\frac{520765}{113882}$	$\frac{15524459}{1138820}$	$\frac{1240669}{113882}$	0	$\frac{353679}{113882}$	$\frac{9761799}{1138820}$
x_{ij}^2	$\frac{8016469}{1138820}$	$\frac{359391}{113882}$	$\frac{125915}{113882}$	$\frac{963309}{569410}$	$\frac{2335313}{284705}$	$\frac{4809511}{569410}$

Неравенства (2.1.4) для мультисети $G = (I, U)$, которая изображена на рис. 3.16, имеют вид (3.3.5):

$$\begin{aligned}x_{21}^1 + x_{21}^2 &\leq 12, x_{21}^1 \geq 0, x_{21}^2 \geq 0, \\x_{24}^1 + x_{24}^2 &\leq 24, x_{24}^1 \geq 0, x_{24}^2 \geq 0.\end{aligned}\tag{3.3.5}$$

Неравенства (2.1.5) для мультисети $G = (I, U)$, которая изображена на рис. 3.16, имеют вид (3.3.6):

$$\begin{aligned}0 &\leq x_{14}^1 \leq 18, \\0 &\leq x_{14}^2 \leq 9, \\0 &\leq x_{23}^1 \leq 7.\end{aligned}\tag{3.3.6}$$

Неравенства (2.1.6) для мультисети $G = (I, U)$, которая изображена на рис. 3.16, имеют вид (3.3.7):

$$\begin{aligned}x_{13}^1 &\geq 0, x_{13}^2 \geq 0, \\x_{23}^2 &\geq 0, x_{34}^1 \geq 0, \\x_{34}^2 &\geq 0.\end{aligned}\tag{3.3.7}$$

Начальная опора представлена в табл. 3.3.3.

Пусть $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ — некоторый начальный мультипоток дробно-линейной экстремальной неоднородной задачи потокового программирования (3.3.1) — (3.3.7), $x \in X$, где X — множество мультипоток. Начальный мультипоток представлен в табл. 3.3.2.

Выберем начальную опору $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ обобщенной мультисети $G = (I, U)$ экстремальной дробно-линейной неоднородной задачи потокового программирования (3.3.1) — (3.3.7). Обобщенная мультисеть $G = (I, U)$ изображена на рис. 3.16.

В состав начальной опоры U_S входят множества дуг $\{U_S^1, U_S^2\}$ и множество мультидуг U^* , где

$$U_S^1 = U_L^1 \cup U_B^1, U_S^2 = U_L^2 \cup U_B^2.$$

Таблица 3.3.3

Характеристики начальной опоры

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
$K_S(i, j)$	{1,2}	{1,2}	{1,2}	{2}	{1,2}	{1,2}
$K_S^1(i, j)$	\emptyset	{1,2}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$K_S^0(i, j)$			{1,2}		{1,2}	
$K_N(i, j)$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	{1}	\emptyset	\emptyset
$K_N^1(i, j)$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	{1}	\emptyset	\emptyset
$K_N^0(i, j)$			\emptyset		\emptyset	
U^*			+		\emptyset	
U_B	\emptyset	\emptyset	\emptyset	{2}	{1,2}	\emptyset

Множества дуг U_L^1, U_L^2 составляют опору $U_L = \{U_L^k, k \in K = \{1, 2\}\}$ обобщенной сети G для разреженной системы (3.3.2) – (3.3.3). Единственный цикл каждой компоненты связности опоры $U_L = \{U_L^k, k \in K\}$ является невырожденным. Опора $U_L = \{U_L^k, k \in K = \{1, 2\}\}$ представлена на рис. 3.19.

Кроме множества дуг $U_L = \{U_L^1, U_L^2\}$, опоры обобщенной сети G для разреженной системы (3.3.2) – (3.3.3) в состав опоры U_S входит множество бициклических дуг $U_B = \{U_B^1, U_B^2\}$.

В состав множества U_B включены дуги:

$$U_B^1 = \{(2,4)^1\}, \quad U_B^2 = \{(2,3)^2, (2,4)^2\}.$$

Произвольным образом выполним нумерацию дуг множества U_B :

$$t(2,4)^1 = 1, \quad t(2,3)^2 = 2, \quad t(2,4)^2 = 3.$$

В состав множества мультидуг U^* опоры U_S входит одна мультидуга:

$$U^* = \{(2,1)\}.$$

Итак, сформирована начальная опора U_S экстремальной неоднородной задачи дробно-линейного программирования (3.3.1) – (3.3.7). Начальная опора U_S представлена в табл. 3.3.3.

Составим начальный опорный мультипоток $\{x, U_S\}$, где начальный мультипоток x приведен в табл. 3.3.2, начальная опора U_S представлена в табл. 3.3.3, $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$.

На начальном мультипоточе x (см. табл. 3.3.2) вычислим значение дробно-линейной целевой функции (3.3.1):

$$f(x) = \frac{p'x + \beta}{q'x + \gamma} = \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^k}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k} = \frac{600534628219725}{926591089188661}.$$

Бициклические дуги $(2,4)^1$, $(2,3)^2$ и $(2,4)^2$ порождают 3 бицикла B_{24}^1 , B_{23}^2 , B_{24}^2 , которым соответствуют характеристические векторы $\delta^1(2,4)$, $\delta^2(2,3)$ и $\delta^2(2,4)$, построенные относительно начальной опоры $U_L = \{U_L^1, U_L^2\}$ (см. рис. 3.19) обобщенной мультисети G для разреженной системы (3.3.2) – (3.3.3).

Полностью система характеристических векторов, построенная относительно опоры $U_L = \{U_L^1, U_L^2\}$ (см. рис. 3.19) обобщенной мультисети G для разреженной системы (3.3.2) – (3.3.3), приведена в табл. 3.3.4.

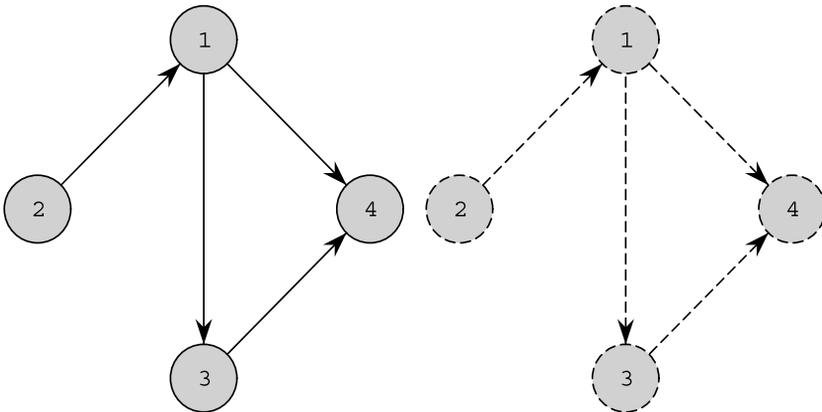


Рис. 3.19. Множество дуг опоры $U_L = \{U_L^1, U_L^2\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (3.3.2) – (3.3.3)

Таблица 3.3.4

Характеристические векторы для начальной опоры U_L

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
$\delta^1(2,3)$	$-\frac{24}{29}$	$-\frac{21}{290}$	-1	1	0	$\frac{189}{290}$
$\delta^1(2,4)$	$-\frac{11}{87}$	$-\frac{673}{870}$	-1	0	1	$-\frac{11}{290}$
$\delta^2(2,3)$	$-\frac{9}{22}$	$-\frac{27}{55}$	-1	1	0	$\frac{3}{11}$
$\delta^2(2,4)$	$\frac{35}{22}$	$-\frac{137}{55}$	-1	0	1	$\frac{14}{11}$

По начальной опоре $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ обобщенной мультисети $G = (I, U)$ экстремальной дробно-линейной неоднородной задачи потокового программирования (3.3.1) – (3.3.7) сформируем матрицу детерминантов D . Матрица D состоит из блоков D_1 и D_2 ,

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = (\Lambda_{\tau\rho}^{kp}, p = \overline{1, l}, t(\tau, \rho)^k = \overline{1, |U_B|}),$$

$$D_2 = (\delta_{ij}(B_{\tau\rho}^k), \xi(i, j) = \overline{1, |U^*|}, t(\tau, \rho)^k = \overline{1, |U_B|}),$$

$\xi = \xi(i, j)$ – номер дуги $(i, j) \in U^*$, $\xi \in \{1, 2, \dots, |U^*|\}$.

Число $\Lambda_{\tau\rho}^{kp}$ – детерминант бицикла $B_{\tau\rho}^k$, который порожден дугой $(\tau, \rho)^k$ относительно ограничения (3.3.4) с номером p , вычисляется следующим образом:

$$\Lambda_{\tau\rho}^{kp} = \lambda_{\tau\rho}^{kp} + \sum_{(i, j)^k \in U_L^k} \lambda_{ij}^{kp} \delta_{ij}^k(\tau, \rho), (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_L^k.$$

Итак, для начальной опоры $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ обобщенной мультисети $G = (I, U)$ экстремальной дробно-линейной неоднородной задачи потокового программирования (3.3.1) – (3.3.7) матрица детерминантов $D = D(U_S)$ бициклов имеет следующий вид:

$$D = \begin{pmatrix} \Lambda_{2,4}^{1,1} & \Lambda_{2,3}^{2,1} & \Lambda_{2,4}^{2,1} \\ \Lambda_{2,4}^{1,2} & \Lambda_{2,3}^{2,2} & \Lambda_{2,4}^{2,2} \\ \delta_{21}(B_{24}^1) & \delta_{21}(B_{23}^2) & \delta_{21}(B_{24}^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{145} & -\frac{463}{55} & \frac{527}{55} \\ -\frac{188}{145} & -\frac{38}{11} & \frac{105}{11} \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Составим для матрицы D транспонированную матрицу D^T .

$$D^T = \begin{pmatrix} \frac{9}{145} & -\frac{188}{145} & -1 \\ -\frac{463}{55} & -\frac{38}{11} & -1 \\ \frac{527}{55} & \frac{105}{11} & -1 \end{pmatrix}.$$

Определим векторы r и ω согласно (3.3.8):

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_{21} \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (3.3.8)$$

Система для вычисления вектора r имеет вид (3.3.9):

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{145} & -\frac{188}{145} & -1 \\ -\frac{463}{55} & -\frac{38}{11} & -1 \\ \frac{527}{55} & \frac{105}{11} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_2 \end{pmatrix}. \quad (3.3.9)$$

Построим вектор ω — правую часть системы (3.3.9) для вычисления вектора потенциалов r .

Бициклические дуги $(2,4)^1$, $(2,3)^2$ и $(2,4)^2$ порождают 3 бицикла $B_{24}^1, B_{23}^2, B_{24}^2$. Имеем $\tilde{t} = 3$.

Компоненты вектора ω вычисляются следующим образом:

$$\omega_t = - \sum_{(i,j)^k \in B_{\tau\rho}^k} (p_{ij}^k - f(x)q_{ij}^k) \delta_{ij}^k(\tau, \rho), t = t(\tau, \rho)^k, k \in K,$$

$$t = \overline{1, \tilde{t}},$$

где \tilde{t} — количество фундаментальных бициклов, порожденных дугами множества $U_B = \{U_B^k, k \in K\}$.

Для рассматриваемого примера 3 вычислим значения $\omega_t, t = \overline{1, \tilde{t}}$.
Имеем

$$\omega_1 = - \frac{1394612800711998527}{13543055359581469176},$$

$$\omega_2 = \frac{9154371616625679539}{65639712758124745240},$$

$$\omega_3 = \frac{3116326671360538723}{6421276248077420730}.$$

Поскольку матрица детерминантов $D = D(U_S)$ бициклов построена по опоре $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$, то $\det D \neq 0$, значит, и $\det D^T \neq 0$. Следовательно, система (3.3.9) имеет единственное решение.

Итак, из системы (3.3.9) однозначно вычислим компоненты r_1, r_2, r_{21} вектора r , которые имеют вид (3.3.10):

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20735}{113882} & -\frac{17293}{113882} & -\frac{1721}{56941} \\ -\frac{14355}{56941} & \frac{7592}{56941} & \frac{6763}{56941} \\ -\frac{75371}{113882} & -\frac{103801}{569410} & -\frac{44377}{284705} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_2 \end{pmatrix}. \quad (3.3.10)$$

Подсчитаем потенциалы:

$$r_1, r_2, r_{21},$$

$$r_{21} = \gamma_{21}.$$

Получим следующие численные значения потенциалов r_1, r_2, r_{21} :

$$r_1 = -\frac{153583358935459067}{2813130546776774796},$$

$$r_2 = \frac{12074735476793441845}{118151482964624541432},$$

$$r_{21} = -\frac{19445502979796291639}{590757414823122707160}.$$

Для подсчета оценок $\bar{\Delta}^k(i, j), k \in K, (i, j) \in U$ используем следующие соотношения:

$$\bar{\Delta}^k(\tau, \rho) = \Delta^k(\tau, \rho) - \sum_{p=1}^l r_p \Lambda_{\tau\rho}^{kp} - \sum_{(i,j) \in U^*} r_{ij} \delta_{ij}^k(B_{\tau\rho}^k), \quad (3.3.11)$$

$$\Delta^k(\tau, \rho) = \Delta_P^k(\tau, \rho) - f(x) \Delta_Q^k(\tau, \rho),$$

$$\gamma_{ij} = r_{ij}, (i, j) \in U^*,$$

$$\Delta_P^k(\tau, \rho) = p_{\tau\rho}^k + \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} p_{ij}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho),$$

$$\Delta_Q^k(\tau, \rho) = q_{\tau\rho}^k + \sum_{(i,j)^k \in U_L^k} q_{ij}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho).$$

По начальной опоре $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ обобщенной мультисети $G = (I, U)$ экстремальной дробно-линейной неоднородной задачи потокового программирования (3.3.1) – (3.3.7) вычислим оценки следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}^1(2,3) &= \Delta^1(2,3) - \left(-\frac{616}{145}\right) \times r_1 - \\ &- \frac{1042}{145} \times r_2 - (-1) \times r_{21} = -\frac{779755175621633671373}{193132231769097808110}. \end{aligned}$$

Проверим условия критерия оптимальности (2.8.2) – (2.8.5) на начальном опорном мультипотокке $\{x, U_S\}$, где мультипоток x представлен в табл. 3.3.2, начальная опора $U_L = \{U_L^1, U_L^2\}$ изображена на рис. 3.19 и опора U_S представлена в табл. 3.3.3.

Выберем мультидугу (i_0, j_0) на которой не выполняются условия критерия оптимальности (2.8.5),

$$(i_0, j_0) = (2,1), (2,1) \in U^*.$$

Положим $y_{2,1}^1 + y_{2,1}^2 = -1$.

В этом случае имеет место релаксация дробно-линейной целевой функции (3.3.1).

Система для вычисления опорных компонент вектора y на первой итерации имеет вид (3.3.12) – (3.3.15).

$$y_{14}^1 + y_{13}^1 - \frac{9}{10} y_{21}^1 = 0,$$

$$y_{24}^1 + y_{21}^1 = 0,$$

(3.3.12)

$$y_{34}^1 - \frac{3}{10} y_{13}^1 = 0,$$

$$-\frac{1}{10} y_{34}^1 - \frac{7}{10} y_{24}^1 - \frac{9}{10} y_{14}^1 = 0.$$

$$y_{14}^2 + y_{13}^2 - \frac{9}{10} y_{21}^2 = 0,$$

$$y_{24}^2 + y_{23}^2 + y_{21}^2 = 0,$$

(3.3.13)

$$y_{34}^2 - \frac{3}{5} y_{23}^2 - \frac{4}{5} y_{13}^2 = 0,$$

$$-\frac{9}{10} y_{34}^2 - \frac{1}{10} y_{24}^2 - \frac{1}{2} y_{14}^2 = 0.$$

$$y_{13}^1 + 8y_{13}^2 + y_{14}^1 + 4y_{14}^2 + 8y_{21}^1 + 6y_{21}^2 + 2y_{23}^2 +$$

$$+ 9y_{24}^1 + 9y_{24}^2 + y_{34}^1 + 3y_{34}^2 = 0,$$

(3.3.14)

$$y_{13}^1 + 6y_{13}^2 + 4y_{14}^1 + 5y_{14}^2 + 3y_{21}^1 + 7y_{21}^2 + 6y_{23}^2 +$$

$$+ 5y_{24}^1 + 8y_{24}^2 + 2y_{34}^1 + 9y_{34}^2 = 0,$$

$$y_{2,1}^1 + y_{2,1}^2 = -1. \quad (3.3.15)$$

Применяя принципы декомпозиции опоры U_S обобщенной мульти-сети $G = (I, U)$ для рассматриваемой экстремальной задачи дробно-линейного потокового программирования (3.3.1) – (3.3.7) и теоретико-графовые свойства опоры U_L обобщенной мультисети G для разреженной системы (3.3.2) – (3.3.3), приведем эффективный алгоритм решения разреженной системы (3.3.12) – (3.3.15) вычисления компонент вектора подходящего направления y

$$y = (y_{ij}^k, k \in K_S(i, j), (i, j) \in U)$$

изменения мультипотока x , который приведен в табл. 3.3.2.

Выполним декомпозицию системы (3.3.12) – (3.3.15) вычисления компонент векторов y .

Сформируем вектор:

$$\begin{pmatrix} 0, p = \overline{1, l} \\ -\text{sgn}(\gamma_{i_0 j_0}), \text{ если } (i, j) = (i_0, j_0) \\ 0, \text{ если } (i, j) \in U^* \setminus (i_0, j_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Составим систему (3.3.16) для вычисления компонент $y_{2,4}^1, y_{2,3}^2, y_{2,4}^2$ вектора y , соответствующих бициклическим дугам $(2,4)^1, (2,3)^2, (2,4)^2$.

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{145} & -\frac{463}{55} & \frac{527}{55} \\ -\frac{188}{145} & -\frac{38}{11} & \frac{105}{11} \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2,4}^1 \\ y_{2,3}^2 \\ y_{2,4}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.3.16)$$

На основании теоремы 2.2.1 матрица детерминантов D системы (3.3.16), построенная по опоре $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$ (см. табл. 3.3.3), является невырожденной. Из системы (3.3.16) однозначно вычислим компоненты $y_{2,4}^1, y_{2,3}^2, y_{2,4}^2$, которые соответствуют бициклическим дугам.

$$\begin{pmatrix} y_{2,4}^1 \\ y_{2,3}^2 \\ y_{2,4}^2 \end{pmatrix} = -D^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{20735}{113882} & -\frac{14355}{56941} & -\frac{75371}{113882} \\ -\frac{17293}{113882} & \frac{7592}{56941} & -\frac{103801}{569410} \\ -\frac{1721}{56941} & \frac{6763}{56941} & -\frac{44377}{284705} \end{pmatrix}.$$

Подставим вычисленные из системы (3.3.16) значения компонент $y_{2,4}^1, y_{2,3}^2, y_{2,4}^2$ подходящего направления изменения мультипотока x , которые соответствуют бициклическим дугам $(2,4)^1, (2,3)^2, (2,4)^2$, в систему

линейных уравнений (3.3.12) – (3.3.15). Получим разреженную систему линейных алгебраических уравнений блочно-диагонального вида, неизвестные которой соответствуют дугам опоры $\{U_L^k, k = 1, 2\}$. Для вычисления компонент вектора y , соответствующих множеству дуг U_L применим теоретико-графовые свойства опоры $U_L = \{U_L^k, k = 1, 2\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы блочно-диагонального вида (3.3.2) – (3.3.3) [16, 41].

В табл. 3.3.5 представлено подходящее направление y изменения мультипотока x .

Таблица 3.3.5

Подходящее направление $y = (y_{ij}^k, k \in K(i, j), (i, j) \in U)$ изменения мультипотока $x = (x_{ij}^k, k \in K(i, j), (i, j) \in U)$

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
y_{ij}^1	$\frac{28589}{341646}$	$\frac{1749127}{3416460}$	$\frac{75371}{113882}$	0	$\frac{75371}{113882}$	$\frac{28589}{1138820}$
y_{ij}^2	$\frac{197471}{1138820}$	$\frac{54407}{113882}$	$\frac{38511}{113882}$	$\frac{103801}{569410}$	$\frac{44377}{284705}$	$\frac{141269}{569410}$

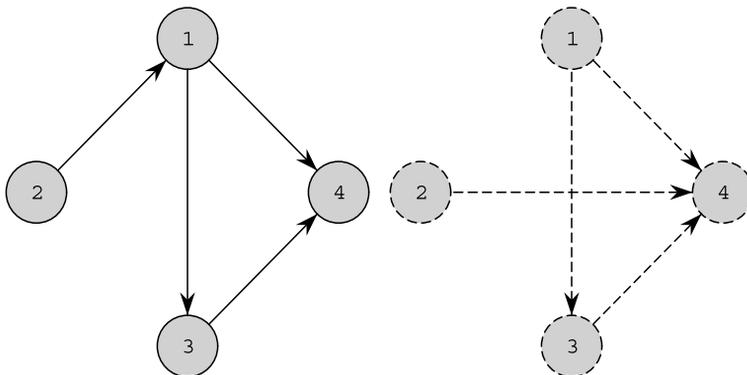


Рис. 3.20. Оптимальная опора $U_L = \{U_L^1, U_L^2\}$ обобщенной мультисети G для разреженной системы (3.3.2) – (3.3.3)

Максимально возможный шаг θ_0 изменения мультипотока x вдоль построенного подходящего направления y достигнут на дуге $(i_*, j_*)^{k_*}$, где $(i_*, j_*)^{k_*} = (2, 3)^1$, и равен $\theta_0 = \theta_{23}^1 = 17539/43472$.

Новый мультипоток x представлен в табл. 3.3.8. Выполним операции по замене опоры. Новая опора $U_S = \{U_S^k, k \in K, U^*\}$, $U_S^k = U_L^k \cup U_B^k$ обобщенной мультисети G экстремальной неоднородной задачи дробно-линейного программирования (3.2.1) – (3.2.8) является оптимальной и представлена в табл. 3.3.7. Множества дуг $U_L = \{U_L^1, U_L^2\}$ оптимальной опоры представлены на рис. 3.20.

Таблица 3.3.6

Характеристические векторы оптимальной опоры

(i, j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
$\delta^1(2,3)$	$-\frac{24}{29}$	$-\frac{21}{290}$	-1	1	0	$\frac{189}{290}$
$\delta^1(2,4)$	$-\frac{11}{87}$	$-\frac{673}{870}$	-1	0	1	$-\frac{11}{290}$
$\delta^2(2,1)$	$-\frac{35}{22}$	$\frac{137}{55}$	1	0	-1	$-\frac{14}{11}$
$\delta^2(2,3)$	-2	2	0	1	-1	-1

Характеристические векторы, построенные относительно оптимальной опоры $\{U_L^k, k = 1, 2\}$ приведены в табл. 3.3.6. Ненулевые оценки на второй итерации равны

$$\bar{\Delta}^1(2,3) = \Delta^1(2,3) + \frac{616}{145} \times r_1 - \frac{1042}{145} \times r_2 = -\frac{7639223376656849543}{2057668286753664585},$$

$$\bar{\Delta}^2(2,1) = \Delta^2(2,1) + \frac{527}{55} \times r_1 + \frac{105}{11} \times r_2 = -\frac{19445502979796291639}{181074809234322483480}.$$

Условия критерия оптимальности (2.8.2) – (2.8.5) на опорном мультипотоке $\{x, U_S\}$ выполнены. Оптимальный мультипоток x представлен

Таблица 3.3.7

Оптимальная опора U_S

(i,j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
$K_S(i,j)$	{1,2}	{1,2}	{1}	{2}	{1,2}	{1,2}
$K_S^1(i,j)$	\emptyset	{1,2}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$K_S^0(i,j)$			{1}		{1,2}	
$K_N(i,j)$	\emptyset	\emptyset	{2}	{1}	\emptyset	\emptyset
$K_N^1(i,j)$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	{1}	\emptyset	\emptyset
$K_N^0(i,j)$			{2}		\emptyset	
U^*			\emptyset		\emptyset	
U_B	\emptyset	\emptyset	\emptyset	{2}	{1}	\emptyset

Таблица 3.3.8

Оптимальный мультипоток

(i,j)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
x_{ij}^1	$\frac{45155}{10503}$	$\frac{13815581}{1155330}$	$\frac{336217}{38511}$	0	$\frac{202937}{38511}$	$\frac{297227}{35010}$
x_{ij}^2	$\frac{1464616}{192555}$	$\frac{61378}{38511}$	0	$\frac{440527}{192555}$	$\frac{1677578}{192555}$	$\frac{1782608}{192555}$

в табл. 3.3.8, опора U_L , где $U_L = \{U_L^1, U_L^2\}$, изображена на рис. 3.20 и оптимальная опора U_S представлена в табл. 3.3.7.

На оптимальном мультипотокке x экстремальной неоднородной задачи потокового программирования (3.3.1) – (3.3.7) значение дробно-линейной целевой функции равно

$$f(x) = \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^k + \beta}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k + \gamma} = \frac{12717261178619200}{19596840826225377}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Габасов Р., Кирилова Ф. М.* Методы линейного программирования : в 3 ч. Минск, 1977. Ч. 1: Общие задачи.
2. *Габасов Р., Кирилова Ф. М.* Методы линейного программирования : в 3 ч. Минск, 1978. Ч. 2: Транспортные задачи.
3. *Габасов Р., Кирилова Ф. М.* Методы линейного программирования : в 3 ч. Минск, 1980. Ч. 3: Специальные задачи.
4. *Габасов Р., Кирилова Ф. М., Костюкова О. И.* Конструктивные методы оптимизации : в 3 ч. Минск, 1986. Ч. 3 : Сетевые задачи.
5. *Габасов Р., Костюкова О. И.* Об одном алгоритме решения сетевой распределительной задачи // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 2.
6. *Данциг Дж. Б.* Линейное программирование, его применения и обобщения. М. : Прогресс, 1966.
7. *Йенсен П., Барнес Д.* Потокосовое программирование / пер. с англ. М., 1984.
8. *Моисеенко Г. Е.* Задача планирования перевозок как задача оптимизации взаимосвязанных потоков // Автоматика и телемеханика. 1982. № 8.
9. *Моисеенко Г. Е.* Задача о многопродуктовом потоке на сети с преобразованием и взаимосвязью потоков продуктов // Автоматика и телемеханика. 1984. № 11.
10. *Пилипчук Л. А.* Линейные неоднородные задачи потокосового программирования. Минск : БГУ, 2009.
11. *Пилипчук Л. А.* Критерий оптимальности для одной экстремальной линейной задачи потокосового программирования // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2005. № 3.
12. *Пилипчук Л. А., Лагуто А. А.* Экстремальная сетевая задача мелко-линейного программирования // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2005. № 2.
13. *Пилипчук Л. А.* Применение КТС МАТНЕМАТИСА для построения рациональных решений недоопределенных систем линейных алгебраических уравнений специального вида // X Белорус. матем. конф. : тез. докл. междунар. науч. конф. Минск, 2008. С. 81–82.
14. *Пилипчук Л. А.* Мелко-линейные неоднородные задачи потокосового программирования // Информационные системы и технологии : материалы междунар. конгресса по информатике : в 2 ч. Минск, 2011. Ч. 2. С. 333–337.
15. *Пилипчук Л. А., Романовский Ю. В., Пешева Ю. Х.* Математическое моделирование и методы построения оптимальных и субоптимальных решений в неоднородных задачах потокосового программирования // X Белорус. матем. конф. : тез. докл. междунар. науч. конф. Минск, 2008. С. 83–84.
16. *Пилипчук Л. А.* Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений. Минск : БГУ, 2012.
17. *Форд Л. Р., Фалкросон Д. Р.* Потоки в сетях / пер. с англ. М., 1966.
18. *Писарук Н. Н.* Модели и методы смешанно-целочисленного программирования. Минск : БГУ, 2010.
19. *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц. М. : Мир, 1988.

20. *Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B.* Network Flows: Theory, Algorithms and Applications. New Jersey, 1993.
21. *Bajalinov E.* Linear-Fractional Programming: Theory, Methods, Applications and Software. Boston : Kluwer Academic Publishers, 2003.
22. *Maros, I.* Computational Techniques of the Simplex Method, Boston : Kluwer Academic Publishers, 2003.
23. *Pilipchuk L. A.* Network optimization problems. Sofia : Heron Press, 2002. P. 66–79.
24. *Pilipchuk L. A., Koliago Yu. H., Pesheva Y. H.* Algorithms for Solving Large Sparse Underdetermined Linear Systems in the Production-transport Problem with Additional Constraints // Proceedings of the 29th International Summer School «Application of Mathematics in Engineering and Economics». Sofia : Bulvest, 2004. P. 229–233.
25. *Pilipchuk L. A., Romanovski I. V.* Fractal-like Matrices // Computing. Austria, 2006. № 76. P. 353–357.
26. *Pilipchuk L. A., Vecharynski E. S.* Solution of large underdetermined linear systems for a generalized non-homogeneous network flow programming problem // Proceedings of I International Conference «Mathematical Modeling and Differential Equations». Minsk, 2007. P. 131–133.
27. *Pilipchuk L. A., Pesheva Y. H.* Decomposition of linear system in dual flow problems // Mathematica Balkanica. New Series. 2007. Vol. 21. P. 21–29.
28. *Pilipchuk L. A., Romanovski I. V., Pesheva Y. H.* Inverse matrix updating in one inhomogeneous network flow programming problem // Mathematica Balkanica. 2007. Vol. 21. P. 329–338.
29. *Pilipchuk L. A., Vecharynski E. S., Pesheva Y. H.* Solution of Large Linear Systems with Embedded Network Structure for a Non-Homogeneous Network Flow Programming Problem // Mathematica Balkanica. 2008. Vol. 22. P. 235–254.
30. *Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S., Pesheva Y. H.* Algorithms for construction of optimal and suboptimal solutions in network optimization problems // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2009. Vol. 54, № 2. P. 193–205.
31. *Pilipchuk L. A., Vishnevetskaya T. S.* Underdetermined linear systems in the Sensor Location Problem // Proceedings of II International Conference «Mathematical Modeling and Differential Equations». Minsk : BSU, 2009. P. 104–106.
32. *Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S., Pesheva Y. H.* Increment of the objective function and optimality criterion for one non-homogeneous network flow programming problem // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2010. Vol. 60, № 3. P. 355–362.
33. *Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S., Pesheva Y. H.* Decomposition of the network support for one non-homogeneous network flow programming problem // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2010. Vol. 60, № 3. P. 345–354.
34. *Pilipchuk L. A., Vishnevetskaya T. S.* Theoretical-graph approach for research of the rank of the special sparse matrix to the Sensor Location Problem for the multigraphs // International Congress on Informatics: Information Systems and Technologies. Minsk : BSU, 2011. Part 2. P. 354–356.
35. *Pilipchuk L. A., Pesheva Y. H., Vishnevetskaya T. S.* Linear problems of optimization of non-homogeneous flows in the generalized network // American Institute of Physics. AIP Conf. Proc. 2011. P. 346–351.

36. *Pilipchuk L. A., Pesheva Y. H., Vishnevetskaya T. S.* Theoretical-graph approach for research of the sparse linear underdetermined systems to the Sensor Location Problem // American Institute of Physics. AIP Conf. Proc. 2011. P. 339–345.

37. *Pilipchuk L. A.* Decomposition algorithms potentials for the non-homogeneous generalized networked problems of linear-fractional programming // International Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol. 82, № 4. 2013. P. 631–637.

38. *Pilipchuk L. A.* Linear-fractional programming: problems of optimization of inhomogeneous flows in the generalized networks // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2013. Vol. 82, № 2. P. 261–273.

39. *Pilipchuk L.A., Pilipchuk A. S., Pesheva Y. H.* Graph algorithms in sparse linear systems with rectangular matrices. American Institute of Physics. AIP Conf. Proc. 2013. Vol. 1570. P. 485–490.

40. *Pilipchuk L. A., Vishnevetskaya T. S.* Technology of construction the unique solution to sensor location problem / American Institute of Physics. AIP Conf. Proc. 2013. Vol. 1570. P. 499–505.

41. *Pilipchuk L. A.* Sparse Linear Systems and Their Applications. Minsk : BSU, 2013. – 235 p.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. РАЗРЕЖЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ	
1.1. Матричная форма	5
1.2. Недоопределенные системы полного ранга	7
1.3. Теоретико-графовые свойства	10
1.4. Сетевая форма	14
1.5. Характеристические векторы	15
1.6. Технология вычисления характеристических векторов	18
1.7. Алгоритм построения общего решения	30
1.8. Алгоритм построения частного решения	32
1.9. Пример построения общего решения	34
1.10. Реализация в <i>Wolfram Mathematica</i>	44
2. ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ	
2.1. Постановка задачи	58
2.2. Теоретико-графовые свойства опоры	70
2.3. Формула приращения целевой функции	86
2.4. Преобразование числителя	90
2.5. Преобразование знаменателя	100
2.6. Система потенциалов	103
2.7. Пример вычисления потенциалов и оценок	106
2.8. Критерий оптимальности мультипотока	120
2.9. Подходящее направление	132
2.10. Нарушение условий оптимальности на дуге	135
2.11. Нарушение условий оптимальности на мультидуге	149
2.12. Вычисление максимального шага	152
2.13. Преобразование опоры	157
2.14. Преобразование опорного мультипотока	161
3. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ	
3.1. Пример 1	175
3.2. Пример 2	186
3.3. Пример 3	214
БИБЛИОГРАФИЯ	232

Научное издание

Пиличук Людмила Андреевна

**ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ
НЕОДНОРОДНЫЕ ЗАДАЧИ
ПОТОКОВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

Ответственный за выпуск *Т. М. Турчиняк*

Художник обложки *Т. Ю. Таран*
Технический редактор *Т. К. Раманович*
Компьютерная верстка *Л. А. Пиличук*
Корректор *Е. И. Бондаренко*

Подписано в печать 24.12.2013. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,72.
Уч.-изд. л. 10,10. Тираж 100 экз. Заказ 56.

Белорусский государственный университет.
ЛИ № 02330/0494425 от 08.04.2009.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
ЛП № 02330/0494178 от 03.04.2009.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.