РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Е.Е. Гуревский, В.А. Емеличев

Белгосуниверситет, механико-математический факультет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
emelichev@bsu.by

Существование неустойчивых (некорректно поставленных по Адамару) векторных задач дискретной оптимизации (см., например, [1, 2]) естественно приводит к необходимости создания регуляризирующего оператора, представляющего собой конкретный вид возмущений исходных данных дискретной задачи с тем, чтобы заменить, возможно, неустойчивую задачу серией возмущенных устойчивых. Первый результат в этом направлении был получен в работе [3], где на основе теории конусов перспективных направлений [1] предложена регуляризация и по векторному критерию и по ограничениям векторной задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП) поиска множества Парето на ограниченном множестве допустимых альтернатив. При этом регуляризация по векторному критерию, осуществляемая путем скалярного параметра возмущения, предполагает замену векторной задачи ЦЛП возмущенной задачей с множеством Слейтера, содержащимся в множестве Парето исходной задачи. В дальнейшем этот результат обобщен в [4, 5], где указан не скалярный, а векторный параметр возмущения исходных данных задачи, позволяющий создать регуляризирующий оператор, который переводит неустойчивую векторную задачу ЦЛП в серию не только устойчивых, но одновременно и эквивалентных задач, т. е. задач с первоначальным множеством Парето.

В настоящем докладе на основе методики, разработанной в [4], проведена регуляризация векторной задачи целочисленного квадратичного программирования, состоящей в поиске множества Парето.

Отметим, что ранее в [6, 7] был описан прием регуляризации векторных задач целочисленного линейного и квадратичного программирования с лексикографическим принципом оптимальности.

Рассмотрим векторную (m-критериальную) задачу целочисленного квадратичного программирования (ЦКП) вида

$$Z^m(A,b): \ \min\{f(x,A,b): \ x \in X\}, \quad m \geqslant 1,$$

где

$$f(x,A,b) = (f_1(x,A,b), f_2(x,A,b), \dots, f_m(x,A,b)),$$

$$f_i(x,A,b) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ijk}x_jx_k + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j, \quad n \geqslant 1.$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $X \subset \mathbf{Z}^n$ — заданное конечное множество целочисленных точек в $\mathbf{R}^n$, $|X| > 1$; $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{R}^{m \times n \times n}$ — трехиндексная матрица размера $m \times n \times n$; $b = (b_{ij}) \in \mathbf{R}^{m \times n}$.

Задачу $Z^m(A,b)$ будем рассматривать как задачу поиска множества Парето $P^m(A,b)$.

Очевидно, что $P^1(A,b)$ является множеством оптимальных решений скалярной квадратичной задачи, которая имеет широкую область приложений. Среди таких задач — квадратичная задача о назначении, многие известные оптимизационные задачи на графах, играющие важную роль при проектировании электронной аппаратуры: задачи размещения, разбиения, компоновки, упаковки и др. [8].

По аналогии с [2–7] задачу $Z^m(A,b)$ будем называть *устойчивой* (по векторному критерию), если

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall (A',b') \in \Xi(\varepsilon) \quad (P^m(A+A', b+b') \subseteq P^m(A,b)),$$

где $\Xi(\varepsilon) = \{(A',b') \in \mathbf{R}^{m \times n \times n} \times \mathbf{R}^{m \times n} : \ \max\{||A'||, ||b'||\} < \varepsilon\}$ — множество возмущающих пар.

Будем говорить, что возмущающая пара (C,d) *регуляризирует* векторную задачу ЦКП $Z^m(A,b)$, если задача $Z^m(A+C, b+d)$ устойчива и $P^m(A,b) = P^m(A+C, b+d)$.

Положим $\mathbf{R}_> = \{u \in \mathbf{R} : \ u > 0\}$, $A_q \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $q \in N_m$, — двухмерные сечения матрицы A, а b_q, $q \in N_m$, — строки матрицы b.

Для всякого вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^m_>$ и любого числа $\tau > 0$ введем в рассмотрение трехиндексную матрицу $C(A,\lambda,\tau) \in \mathbf{R}^{m \times n \times n}$ с одинаковыми двухмерными сечениями

$$C_i = \tau \sum_{q=1}^{m} \lambda_q A_q, \quad i \in N_m,$$

и матрицу $d(b,\lambda,\tau) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ с одинаковыми строками

$$d_i = \tau \sum_{q=1}^{m} \lambda_q b_q, \quad i \in N_m.$$

Теорема 1. *Для любого вектора $\lambda \in \mathbf{R}^m_>$ существует такое число $\gamma > 0$, что для всякого числа τ, удовлетворяющего неравенствам $0 < \tau < \gamma$, возмущающая пара $(C(A,\lambda,\tau)$, $d(b,\lambda,\tau))$ регуляризирует векторную задачу ЦКП $Z^m(A,b)$.*

Литература

1. *Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т.* Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наукова думка, 1995.

2. *Сергиенко И.В., Шило В.П.* Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. Киев: Наукова думка, 2003.

3. *Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И.* О регуляризации задач целочисленной векторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 1993. № 3. С. 172–176.

4. *Емеличев В.А., Янушкевич О.А.* О регуляризации многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования // Известия вузов. Математика. 1999. № 12. С. 38–42.

5. *Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.P.* Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. 2002. V. 51. N 4. P. 645–676.

6. *Емеличев В.А., Янушкевич О.А.* О регуляризации лексикографической векторной задачи целочисленного программирования // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 6. С. 125–130.

7. *Емеличев В.А., Янушкевич О.А.* Устойчивость и регуляризация векторной лексикографической задачи квадратичного дискретного программирования // Кибернетика и системный анализ. 2000. № 2. С. 54–62.

8. *Шор Н.З., Стеценко С.И.* Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. Киев: Наукова думка, 1989.