ЗАДАЧА ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ С СЕРВЕРОМ

Г.П. Волчкова

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики

Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь

Volchkovagp@mail.ru

Рассматривается следующая задача. Имеется n программ, m одинаковых процессоров и один сервер. Каждая программа характеризуется временем скачивания данных с сервера и временем выполнения ее на процессоре. Каждый процессор имеет заранее оговоренный список выполняемых программ. Необходимо так организовать порядок выполнения программ на процессорах, при котором время завершения последней программы минимально.Порядок выполнения программ произволен и времена выполнения могут быть различными. Назовем программы- работами, процессоры- приборами. Получим задачу теории расписаний типа $PDS \setminus \setminus C_{\max}$. Задачу для m-параллельных приборов с одним сервером и заданным списком работ для каждого прибора. Задача $PD2, S \setminus \setminus C_{\max}$ NP-трудна в сильном смысле [1]. Оценка $2 - 1/m$ была предложена в [2] для m параллельных приборов с одним сервером и неопределенным списком работ для каждого прибора.

Докажем , что для задачи $PDS \setminus \setminus C_{\max}$ существует алгоритм с гарантированной оценкой $2 - 1/m$. Сортируем работы по невозрастанию времени выполнения, если у двух работ они совпадают, то сортируем по невозрастанию времени скачивания. Последовательно назначаем работы на первый доступный прибор (т.е. который не занят скачиванием и выполнением). Пусть d_i — время закачки i-й работы, e_i — время выполнения i-й работы, T^A — решение, полученное с помощью приближенного алгоритма, T^* — оптимальное решение. Очевидны следующие неравенства:

$$T^* \geqslant \sum_{i=1}^{n} d_i + e_n, \quad T^* \geqslant \max_{i=\overline{1,n}}(e_i + d_i), \quad T^* \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i + \sum_{i=1}^{n} d_i}{m}.$$

Пусть S_i — время простоя сервера до выполнения i-й работы, т.е. время, когда работают все процессоры и не идет ни одна закачка. Тогда справедлива оценка: $S_k \leqslant m^{-1}\sum_{i=1}^{n-1} e_i \leqslant T^*$, $T^A = \sum_{i=1}^{k} d_i + e_k + S_k$, где k номер, последней завершаемой работы. Рассмотрим дробь

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{k} d_i + e_k + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} e_i - \frac{1}{m}e_k}{\max\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} e_i + \sum_{i=1}^{k} d_i}{m}, \sum_{i=1}^{k} d_i + e_k\right)}.$$

Понятно, что $A \geqslant T^*.T$. Пусть $\sum_{i=1}^{k} d_i + e_k > m^{-1}(\sum_{i=1}^{k} e_i + \sum_{i=1}^{k} d_i)$. Тогда, если мы будем уменьшать $\sum_{i=1}^{k} d_i$, пока выполняется неравенство, то дробь A будет расти (случая $\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant 0$ быть не может, так как мы рассматриваем $m \leqslant n$). Если $\sum_{i=1}^{k} d_i + e_k < m^{-1}(\sum_{i=1}^{k} e_i + \sum_{i=1}^{k} d_i)$, то будем увеличивать $\sum_{i=1}^{k} d_i$, пока выполняется неравенство, и дробь будет возрастать. Таким образом, для максимального значения дроби A достаточно рассмотреть случай $\sum_{i=1}^{k} d_i + e_n = m^{-1}(\sum_{i=1}^{k} e_i + \sum_{i=1}^{k} d_i)$. Тогда $m^{-1}\sum_{i=1}^{k} e_i = (1 - 1/m)(\sum_{i=1}^{n} d_i + e_k) + m^{-1}e_k$. Отсюда получаем

$$A \leqslant \frac{(2 - \frac{1}{m})(\sum_{i=1}^{k} d_i + e_k) + \frac{1}{m}e_k - \frac{1}{m}e_k}{\max\left(\sum_{i=1}^{k} e_i + \sum_{i=1}^{k} d_i, \sum_{i=1}^{k} d_i + e_k\right)} \leqslant 2 - \frac{1}{m}.$$

Предложенная оценка достигается в следующем случае. Пусть имеется $m - 1$ работа у которой $e_i = m$, $m > 1$, $i = 1, \cdots, m$ и $d_i = 0$, $i = 1, \cdots, m - 1$. А так же $m - 1$ работа с $e_j = 1$, $d_j = 0$, $j = 2, \cdots, m-2$ и одна работа с $e_{2m-1} = 0$, $m > 1$, $d_{2m-1} = m - 1$. Тогда в случае описанного алгоритма сначала выполняются работы с максимальным временем выполнения, то есть работы с $e_i = m$, $d_i = 0$, $i = 1, \cdots, m-1$, после чего начинают выполняться работы с длительностями $e_j = 1$.

Последней будет выполняться работа $2m-1$ с $e_{2m-1} = 0$. Таким образом $T^A = C^A_{\max} = m+m-1 = 2m-1$. Значение оптимального решения,когда сначала выполняются работы с $e_j = 1$, $d_j = 0$, $j = 1, \cdots, m$ затем работа с $e_m = 0$, $d_{2m-1} = m-1$ и только затем работы $e_i = m$, $m > 1$, $i = m, \cdots, 2m-1$ и $d_i = 0$, $i = m, \cdots, 2m-1$ будет $T^* = C^*_{\max} = m$. Откуда следует, что

$$\frac{T^A}{T^*} = \frac{2m-1}{m} = 2 - \frac{1}{m}.$$

Литература

1. *Glass C.A., Shafranskyky Y.M.,Strusevich V.A.* Sheduling for Parallel Dedicated Mashines with a Single Server // Naval Research Logistics. 2000. V. 47. P. 304–328.

2. *Hall N.G., Potts C.N., Sriskandarajan C.* Parallel machine scheduling with a common server // WorKing paper series WP 94-21, MaxM. Fisher College of business. The Ohaio State University. Columbus, OH, 1994.