

ТОЧНЫЕ D -ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ С НЕРАВНОТОЧНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

Кирлица В.П.

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики,

Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

Kirlitsa@bsu.by

Рассмотрим линейную модель неравноточных наблюдений:

$$y_i = \theta_1 x_{1i} + \dots + \theta_m x_{mi} + \varepsilon(x^{(i)}), \quad i = 1, \dots, n; \quad n \geq m, \quad (1)$$

где y_i — наблюдаемые переменные, $\theta_1, \dots, \theta_m$ — неизвестные параметры; $x^{(i)}$ — m -вектор контролируемых переменных с компонентами из интервала $[-1, 1]$; $\varepsilon(x^{(i)})$ — ошибки наблюдений со средним значением нуль и ограниченной дисперсией

$$D(\varepsilon(x^{(i)})) = a_0 + a_1 x_{1i} + \dots + a_m x_{mi} > 0, \quad a_0 > 0, \quad |a_1| + \dots + |a_m| < a_0, \quad (2)$$

для каждой реализации $x^{(i)}$ из единичного m -мерного куба, $|x_{ij}| \leq 1$.

В [1] показано, что все точки спектра точного D -оптимального плана эксперимента для модели (1) с равноточными наблюдениями ($D(\varepsilon(x^{(i)})) = \text{const}$) лежат в вершинах единичного m -мерного куба. Это утверждение можно обобщить на случай неравноточных наблюдений, когда дисперсия (2) наблюдений линейно изменяется на m -мерном единичном кубе [2]

Теорема 1. *Существует точный D -оптимальный план экспериментов для модели (1), (2), все точки спектра которого лежат в вершинах единичного m -мерного куба.*

Теорема 1 позволяет строить точные D -оптимальные планы экспериментов для модели (1), (2). Так, например, для модели наблюдений (1), (2) в случае, когда $m = 3$, $n = 40$ и дисперсия наблюдений равна $1 + 0.2x_{1i} - 0.3x_{2i} - 0.1x_{3i}$, точный D -оптимальный план следующий. Необходимо произвести 10 наблюдений в точке $x^{(1)}$, 12 наблюдений в точке $x^{(2)}$, 7 наблюдений в точке $x^{(3)}$, 11 наблюдений в точке $x^{(4)}$, где $x^{(1)} = (1, 1, 1)$, $x^{(2)} = (-1, 1, 1)$, $x^{(3)} = (1, 1, -1)$, $x^{(4)} = (-1, 1, -1)$ — вершины единичного куба.

Теорема 1 также дает возможность установить структуру таких планов в частном случае, когда $m = 2$.

Теорема 2. *Точный D -оптимальный план экспериментов для модели наблюдений (1), (2) с двумя переменными ($m = 2$) следующий. Необходимо провести s наблюдений для четных $n = 2s$ или $s + 1$ наблюдение для нечетных $n = 2s + 1$ в вершине единичного квадрата, в которой величина дисперсии самая минимальная. Остаток наблюдений необходимо осуществить в вершине квадрата, в которой дисперсия наблюдений принимает второе по величине минимальное значение.*

Литература

1. Moussiadis C., Kounias S. Exact D -optimal observation Designs of Resolutions 3, when $N = 1$ or $2 \pmod{4}$. // Operationsforsch. U. Statist. Ser. Statist. Vol. 14, No. 3. P. 367–379.