НАХОЖДЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ОДНОРОДНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.Н. Гайдук, В.А. Галинский

Белгосуниверситет, НИИ прикладных проблем математики и информатики,
Независимости, 4, 220030 Минск, Беларусь
g.d.k@list.ru, GalinskijVA@bsu.by

Рассмотрим однородную цепь Маркова (ОЦМ) с n состояниями и матрицей переходных вероятностей P следующего вида:

$$P = \operatorname{circ}\{0, p, q, 0, \ldots, 0\}, \tag{1}$$

где P — это циркулянтная $(n \times n)$-матрица, $p, q > 0, p + q = 1$. Из (1) следует, что матрица P является дважды стохастической и следовательно ОЦМ имеет равномерное стационарное распредление. Фундаментальная матрица $Z = (I - (P - A))^{-1}$ [1], где I — единичная $(n \times \times n)$-матрица, $A = \operatorname{circ}\{1/n, 1/n, \ldots, 1/n\}$ – циркулянтная $(n \times n)$-матрица стационарного распредления вероятностей.

Теорема 1. *Пусть переходная матрица ОЦМ имеет вид (1), тогда фундаментальная матрица Z яляется циркулянтной $Z = \mathrm{circ}\{z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n\}$ и ее элементы вычисляются по следующим формулам:*

$$z_n = \frac{1}{n}\left(1 - \left(- \frac{1}{n}\frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{1}{n}H(n) + \Delta \cdot (-h(n) + n - 1)\right)\right), \quad z_1 = z_n + \Delta,$$

$$z_j = -\frac{j-1}{n} + \frac{1}{n}h(j) + \Delta(\beta(j) + 1) + z_n \quad j = \overline{2, n-1}, \tag{2}$$

где

$$\Delta = z_1 - z_n = -\frac{n(1+q) + (-q)^n - 1}{n(1+q)((-q)^n - 1)},$$

$$h(j) = \frac{-(-q)^j - q^2 - 2q + j(q + q^2)}{(1+q)^2}, \quad \beta(j) = \frac{-q(1 - (-1)^{j-1}q^{j-1})}{1+q}, \quad j = \overline{2, n},$$

$$H(n) = \sum_{k=3}^{n-1} h(k) = \frac{(6q + 2q^3 + 6q^2 - 5nq - 8nq^2 - 3nq^3 + 2n^2q^2 + n^2q^3 + n^2q + 2(-1)^n q^n)}{2(1+q)^3}.$$

Теорема 1. позволяет найти $(n \times n)$-матрицу средних времен достижения

$$M = (I - Z - EZ_{dg})D, \tag{3}$$

где $(n \times n)$-матрица $E = \mathrm{circ}\{1, 1, \ldots, 1\}$, $(n \times n)$-матрица $D = \mathrm{circ}\{n, 0, 0, \ldots, 0\}$ и $(n \times n)$-матрица $Z_{dg} = \mathrm{circ}\{z_1, 0, 0, \ldots, 0\}$.

Следствие 1. *Пусть переходная матрица ОЦМ имеет вид (1), тогда матрица M является циркулянтной $M = \mathrm{circ}\{m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n\}$ и ее элементы вычисляются следующим образом:*

$$m_1 = n, \quad m_j = j - 1 - h(j) - n\Delta\beta(j), \quad j = \overline{2, n-1}, \quad m_n = n\Delta. \tag{4}$$

Литература

1. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова. М.. Наука, 1970.
2. *Хорн, Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.