ОЦЕНИВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОШИБОК ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КРИТЕРИЯ ПРОВЕРКИ ПРОСТЫХ ГИПОТЕЗ О ПАРАМЕТРЕ НЕПРЕРЫВНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

А.Ю. Харин, С.Ю. Чернов

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики,
пр. Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
KharinAY@bsu.by

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) наблюдается последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$ с плотностью распределения вероятностей $f(x, \theta)$. Относительно неизвестного значения параметра θ, $\theta \in \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ имеются две простые гипотезы: $H_0 : \theta = \theta_0$, $H_1 : \theta = \theta_1$.

Обозначим статистику накопленного логарифмического отношения правдоподобия:

$$\Lambda_n = \Lambda_n(x_1, \ldots x_n) = \sum_{t=1}^{n} \lambda_t, \quad \text{где} \quad \lambda_t = \ln \frac{f(x_t, \theta_1)}{f(x_t, \theta_0)}, \quad n \in N.$$

Для проверки гипотез по $n = 1, 2, \ldots$ наблюдениям в соответствии с последовательным критерием отношения вероятностей [1] выносится решение:

$$d = d(x_1, \ldots x_n) = \begin{cases} 0, & \Lambda_n \leqslant C_-, \\ 1, & \Lambda_n \geqslant C_+, \\ 2, & \Lambda_n \in (C_-, C_+), \end{cases} \qquad C_- = \ln \frac{\beta_0}{1-\alpha_0}, \quad C_+ = \ln \frac{1-\beta_0}{\alpha_0}, \tag{1}$$

где α_0, β_0 — максимально допустимые значения вероятностей ошибок I-го и II-го рода; решения $d = 0$ и $d = 1$ означают принятие соответствующей гипотезы, а решение $d = 2$ — получение $(n+1)$-го наблюдения. В [3] предлагается подход, позволяющий оценить характеристики последовательных тестов для дискретного распределения вероятностей.

В настоящей работе для оценки вероятностей ошибок I-го и II-го рода критерия (1) строятся однородные цепи Маркова Λ_n^- и Λ_n^+ с числом состояний $m + 2$:

$$\Lambda_n^- = \sum_{t=1}^{n} \lambda_t^-, \quad \lambda_1^- = C_- + \left[\frac{\lambda_1 - C_-}{h}\right] h, \quad \lambda_t^- = \left[\frac{\lambda_t}{h}\right] h, \quad t \geqslant 2;$$

$$\Lambda_n^+ = \sum_{t=1}^{n} \lambda_t^+, \quad \lambda_1^+ = C_- + \left[\frac{\lambda_1 - C_-}{h}\right] h + h, \quad \lambda_t^+ = \left[\frac{\lambda_t}{h}\right] h + h, \quad t \geqslant 2,$$

$h = (C_+ - C_-)/m$, где $m \in N$ — число подмножеств-полосок, на которые разбивается интервал (C_-, C_+) между порогами теста.

Для последовательных критериев, построенных по цепям Маркова Λ_n^- и Λ_n^+ с использованием [2], можно получить точные значения вероятностей ошибок первого рода — α_m^-, α_m^+. В настоящей работе показано, что $\alpha_m^- \leqslant \alpha \leqslant \alpha_m^+$, где α — неизвестное значение вероятности ошибки I-го рода для последовательного критерия (1).

В качестве оценки, приближающей значения α, принимается величина $\hat{\alpha} = (\alpha_m^+ + \alpha_m^-)/2$. Для случая, когда наблюдения имеют распределение вероятностей $f(x, \theta) = e^{-(x-\theta)^2/2}/\sqrt{2\pi}$, доказано, что $\alpha_m^+ - \alpha_m^- = O(h)$, поэтому погрешность $|\alpha - \hat{\alpha}| \leqslant (\alpha_m^+ - \alpha_m^-)/2 \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Численные эксперименты иллюстрируют полученные теоретические результаты.

Литература

1. *Вальд А.* Последовательный анализ. М.: Наука, 1960.
2. *Харин А.Ю.* Об одном подходе к анализу последовательного критерия отношения правдоподобия для различения простых гипотез. // Вестник БГУ, Сер. 1. 2002. № 1. С. 92–96.
3. *Kharin A., Kishilau D.* Robust Sequential Testing of Hypotheses on Discrete Probability Distributions // Austrian Jornal of Statistics. 2005. V. 34, № 2. P. 153–162.