СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОГО УКЛОНЕНИЯ ВЕЙВЛЕТНОЙ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Н.В. Семенчук

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы,
Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь
n.semenchuk@grsu.by

Рассматривается задача оценки неизвестной спектральной плотности $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi;\pi]$ по T последовательным наблюдениям $X(0), X(1), \ldots, X(T-1)$ за стационарным случайным процессом $X(t)$ с $MX(t) = 0$, $t \in \mathbb{Z}$, полученными через равные промежутки времени. В качестве оценки спектральной плотности $f(\lambda)$ исследуется статистика:

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{k=1}^{2^J} \hat{\alpha}_{J,k} \tilde{\varphi}_{J,k}(\lambda), \tag{1}$$

где $\hat{\alpha}_{J,k} = \int_{\Pi} I_T(\alpha)\tilde{\varphi}_{J,k}(\alpha)d\alpha$, $\tilde{\varphi}_{J,k}(\lambda)$ — 2π-периодическая масштабирующая функция [1], $J \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Pi$; $I_T(\alpha)$ — периодограмма [3].

Определение 1. Будем говорить, что стационарный процесс $X(t), t \in \mathbb{Z}$, принадлежит множеству случайных процессов χ, если у него существуют спектральная плотность $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка $f_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_j \in \Pi$, $j = \overline{1,3}$ и $m = 0$.

Внутри множества χ определим класс $\chi(\lambda, f, \alpha, L, C_2) \subset \chi$ следующим образом: $X(t) \in \chi(\lambda, f, \alpha, L, C_2) \subset \chi$, если при заданных $\lambda \in \Pi$ $f(\lambda) > 0$, $L > 0$, $C_2 > 0$ спектральная плотность $f(\lambda) \in \mathrm{Lip}_\alpha(L)$, $\alpha \in (0, 1]$ и

$$|f_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)| \leqslant C_2,$$

$\lambda_j \in \Pi$, $j = 1, 2, 3$.

Для среднеквадратического уклонения оценки (1) согласно работе [2] получено следующее выражение:

$$\nabla \hat{f}_T(\lambda_j) = \left(\int_{\Pi} |x|^\alpha \left| \sum_{k=1}^{2^J} \tilde{\varphi}_{J,k}(\lambda)\tilde{\varphi}_{J,k}(\lambda + x) \right| dx \right)^2 +$$

$$+\frac{2\pi}{T} \sum_{k_1=1}^{2^J} \sum_{k_2=1}^{2^J} \tilde{\varphi}_{J,k_1}(\lambda)\tilde{\varphi}_{J,k_2}(\lambda) \int_{\Pi} \tilde{\varphi}_{J,k_1}(\alpha) \left(\tilde{\varphi}_{J,k_2}(-\alpha) + \tilde{\varphi}_{J,k_2}(\alpha)\right) f^2(\alpha)d\alpha,$$

Для процессов $X(t) \in \chi(\lambda, f, \alpha, L, C_2)$ исследовано асимптотическое поведение вышеприведенного выражения. Вычислены коэффициенты при асимптотике его главного члена для наиболее часто используемых масштабирующих функций.

Литература

1. *Бриллинджер Д.* Временные ряды. Обработка данных и теория М.: Мир, 1980. 560 с.

2. *Семенчук Н.В.* Вычисление моментов оценок коэффициентов вейвлет разложения спектральной плотности // Вестник БГУ. Сер. 1. Физ. Мат. Мех. 2006. № 2. С. 117-121.

3. *Neumann M.H.* Spectral density estimation via nonlinear wavelet methods for stationary non-Gaussian time series // J. Time Ser. Anal. 1996. Vol. 17, № 6 P. 137–166.