СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ДВУХЪЯМНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Н.А. Чеканов, Е.В. Шевченко

Белгородский государственный университет,

Студенческая 14, 308007 Белгород, Россия

chekanov@bsu.edu.ru, eug_shev@mail.ru

Открытие динамического хаоса в неинтегрируемых классических системах стимулировало поиск его проявлений в характеристиках соответствующего квантового аналога. Наиболее успешной оказалась гипотеза об универсальности флуктуаций энергетического спектра E_j, согласно которой функция распределения $p(s)$ расстояний s между соседними уровнями $s = E_{j+1} - E_j$ имеет вигнеровский вид $p(s) = \pi s/2 \cdot \exp(-\pi s^2/4)$ для квантовых систем хаотических в классическом пределе. Если же классическая система является интегрируемой, то функция распределения расстояний между соседними значениями спектра ее квантового аналога имеет пуассоновский вид $p(s) = \exp(-s)$. Вычисления и анализ спектров, проведенные для биллиардных модельных систем и двумерных систем с простым видом гамильтониана, в целом подтвердили эту гипотезу. Однако для более сложных гамильтонианов теоретический вопрос о квантовых проявлениях классического хаоса является открытым.

В предыдущей работе [1] , были представлены некоторые результаты, в частности, для двумерной квантовой C_{2v} симметричной системы, параметры гамильтониана которой выбраны так, что эта система при классическом описании допускала хаотический режим движения. В настоящем докладе представлены результаты исследования также двумерной квантовой C_{2v} симметричной системы, но классический аналог которой является интегрируемой системой.

Классическая функция Гамильтона рассматриваемой системы имеет вид

$$H(x,y,p_x,p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{a}{2}(x^2 + y^2) - \frac{a'}{2}x^2 + 2x^2y^2 + x^4 + y^4, \tag{1}$$

где (x, y) и (p_x, p_y) — канонически сопряженные переменные, a, a' — параметры. Система (1) является интегрируемой, так как имеет, кроме энергии, второй интеграл движения $I = (xp_y - yp_x)^2 + a'(p_x^2/2 + x^4 + x^2y^2 + (a - a')/2 \cdot x^2)$, что также иллюстрируется построенными сечениями Пуанкаре. Нами найдено, что система является не только интегрируемой, но и сепарабельной в эллиптических координатах.

Для квантового аналога $\hat{H}$ функции Гамильтона (1) было решено уравнение Шредингера $\hat{H}\psi(x,y) = E\psi(x,y)$ методом диагонализации в системе базисных функций двумерного осциллятора и найдены 2211 уровней для состояний A_1 типа и по 2145 уровней для каждого из состояний A_2, B_1, B_2 типов в соответствии с четырьмя неприводимыми представлениями группы C_{2v}. Из них около 40% уровней каждого типа вычислены с точностью менее $0.1 \cdot s_{min}$, s_{min} – минимальное расстояние между соседними уровнями, которые приняты в исследовании статистических свойств спектра.

Проведенный анализ показал хорошее согласие статистических свойств спектра всех четырех типов с теоретическими предсказаниями для интегрируемых систем: распределение $p(s)$ хорошо описывается распределением Пуассона , а значения спектральной жесткости $\Delta_3(L)$ статистики Дайсона лежат на прямой $L/15$ (L — длина энергетического интервала) до некоторого значения L_{max}, после чего происходит ее насыщение.

Литература

1. *Чеканов Н.А., Шевченко Е.В.* Флуктуации спектра и узловая структура собственных функций некоторых двумерных квантовых систем: численное моделирование // Первая международная конференция "Математическое моделирование и дифференциальные уравнения", ред. В.И. Корзюк, С.В. Лемешевский, Е.С. Чеб. Ин-т математики НАН Беларуси, Минск, 2007. С. 61–63.