

РАЗНОСТНЫЙ АНАЛОГ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СВЕРХИЗЛУЧАТЕЛЬНОЙ ЛАВИНЫ

А.А. Самодуров, Н.А. Воронкина

Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
asamodurov@inbox.ru, natali-voronkina@mail.ru

Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$x'' + \alpha x' + K \exp(x) + \gamma = 0, \quad (1)$$

где α, K, γ — положительные постоянные, имеющие конкретный физический смысл, хорошо описывает процесс, называемый сверхизлучательной лавиной (СИЛ) [1, 2]. Вместе с тем, величина x выражается через дискретную величину, $x = \ln(N)$, где N — число атомов, в системе которых создается инверсная заселенность. Поэтому есть основания считать, что разностное уравнение (рекуррентное соотношение)

$$x(n+2) + \alpha x(n+1) + K \exp(x(n)) + \gamma = 0 \quad (2)$$

является более точной моделью СИЛ. Покажем это.

Замена

$$u(k, l) = z(k, l) + p(k, l),$$

$$x_1 = f(k, l),$$

$$y_1 = y$$

в уравнении

$$u(k+1, l+1) = K \exp(y(k, l)) \quad (3)$$

приводит его к виду (2), если положить

$$f(k+1, l+1) = \alpha f(k+1, l) f(k, l+1),$$

$$f(k+1, l+1) = \frac{1}{2\alpha} p(k+1, l+1),$$

$$p(k+1, l+1) = \exp(p).$$

Иными словами, решения уравнения (2) выражаются через решения (3). Решения уравнения (3) являются весьма быстро растущими функциями своих дискретных аргументов, что соответствует СИЛ. Уравнение (2) возможно исследовать качественными методами [3]. Результаты исследований предлагаются к обсуждению.

Литература

1. Нагибаров В.Р., Копвиллем У.Х. Сверхизлучение бозонной лавины // ЖЭТФ, 1968. Т. 59, вып. 1. С. 312-317.
2. Бондарев И.Р., Чудновский В.М., Самодуров А.А. Групповой анализ уравнений сверхизлучения и сверхизлучательного усиления с учетом релаксации // Теоретико-групповые методы в фундаментальной и прикладной физике. — М.: Наука, 1988. С. 186-194.
3. Agarwal R.P. Difference equations and inequalities. Theory, methods and applications. — Marcel Dekker, Inc., 1992.