ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

В.И. Корзюк[1,2], **О.А. Конопелько**[2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
korzyuk@bsu.by

[2] Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
o.konopelko@gmail.com

Для функции u независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ $(n+1)$-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ рассматривается линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка составного типа

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} + (b^2 - a^2)\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\Delta u - a^2 b^2 \Delta^2 u + A^{(1)} u = f(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

где a и b — некоторые постоянные, удовлетворяющие соотношению $b^2 \geqslant a^2$, $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа, $A^{(1)}u = \sum_{i=0}^{n} a^{(i)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + b^{(0)}(\boldsymbol{x})u$, $a^{(i)}(\boldsymbol{x})$, $i = \overline{0,n}$, $b^{(0)}(\boldsymbol{x}) \in C(\overline{Q})$, $f(\boldsymbol{x}) \in L_2(Q)$ — заданные функции.

Уравнение (1) задается в цилиндрической области $Q = (0,T)\times\Omega$. Граница ∂Q состоит из нижнего основания $\Omega^{(0)} = \{\boldsymbol{x} \in \partial Q \mid x_0 = 0\}$, верхнего основания $\Omega^{(T)} = \{\boldsymbol{x} \in \partial Q \mid x_0 = T\}$ и боковой поверхности $\Gamma = \{\boldsymbol{x} \in \partial Q \mid 0 < x_0 < T\}$.

Для уравнения (1) рассматриваются следующие граничные задачи.

Задачи I: $b^2 > a^2$,

$$\mathfrak{L}u = f, \quad \boldsymbol{x} \in Q,$$

$$u|_{\Omega^{(0)}} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(0)}} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{\Omega^{(0)}} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0, \quad u|_\Gamma = \left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|_\Gamma = 0,$$

где $\boldsymbol{\nu} = (\nu_0, \ldots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней относительно Q нормали к гиперповерхности Γ. Вместо условия $\left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0$ на верхнем основании $\Omega^{(T)}$ можно задать условие $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0$, а на боковой поверхности Γ вместо условий $u|_\Gamma = \left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|_\Gamma = 0$ — условия $u|_\Gamma = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^2}\right|_\Gamma = 0$ или условия $\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^3 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^3}\right|_\Gamma = 0$.

Задачи II: $a^2 = b^2$,

$$\mathfrak{L}u = f, \quad A^{(1)}u = a^{(0)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_0} + b^{(0)}(\boldsymbol{x})u, \quad \boldsymbol{x} \in Q,$$

$$u|_{\Omega^{(0)}} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(0)}} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{\Omega^{(0)}} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0, \quad u|_\Gamma = \left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|_\Gamma = 0.$$

Вместо условия $\left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0$ на верхнем основании $\Omega^{(T)}$ можно задать условие $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0$, а на боковой поверхности Γ вместо условий $u|_\Gamma = \left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|_\Gamma = 0$ — условия $u|_\Gamma = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^2}\right|_\Gamma = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^3 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^3}\right|_\Gamma = 0$ или $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^2}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^3 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^3}\right|_\Gamma = 0$.

Задачи III: $a^2 = b^2$,

$$\mathfrak{L}u = f, \quad A^{(1)}u = a^{(0)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_0} + b^{(0)}(\boldsymbol{x})u, \quad \boldsymbol{x} \in Q,$$

$$u|_{\Omega^{(0)}} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{\Omega^{(0)}} = \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}\right|_{\Omega^{(0)}} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0, \quad u|_\Gamma = \left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|_\Gamma = 0.$$

Вместо условия $\left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0$ на верхнем основании $\Omega^{(T)}$ можно задать условие $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0$, а на боковой поверхности Γ вместо условий $u|_\Gamma = \left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|_\Gamma = 0$ — условия $u|_\Gamma = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^2}\right|_\Gamma = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^3 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^3}\right|_\Gamma = 0$ или $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^2}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^3 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^3}\right|_\Gamma = 0$.

Если граничные условия в задачах I–III неоднородные, то они предварительно с помощью соответствующей замены [1] сводятся к однородным.

В задачах I–III можно поменять местами условия, которые задаются на $\Omega^{(0)}$ и $\Omega^{(T)}$.

Обозначим $H^3_{\text{гр}}(Q)$ – подпространство пространства $H^3(Q)$ квадратично суммируемых функций вместе с квадратично суммируемыми до третьего порядка включительно обобщенными производными, элементы которого удовлетворяют граничным условиям соответствующей задачи.

Определение 1. Функцию $u \in H^3_{\text{гр}}(Q)$ будем называть обобщенным решением задач I–III, если она удовлетворяет равенству

$$-\int\limits_Q \frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}\frac{\partial w}{\partial x_0}d\boldsymbol{x} - \int\limits_Q \frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}(x_0 - T)\frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2}d\boldsymbol{x} - (b^2 - a^2)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q \frac{\partial^3 u}{\partial x_0^2 \partial x_i}(x_0 - T)\frac{\partial^2 w}{\partial x_0 \partial x_i}d\boldsymbol{x} +$$

$$+a^2 b^2 \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_Q \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 - T)\frac{\partial^3 w}{\partial x_0 \partial x_i \partial x_j}d\boldsymbol{x} + \int\limits_Q A^{(1)} u \mathcal{M} w \, d\boldsymbol{x} = \int\limits_Q f \mathcal{M} w \, d\boldsymbol{x}.$$

для любой функции $w \in H^3_{\text{гр}}(Q)$, $f \in L_2(Q)$.

Теорема 1. *Для любой функции* $f \in L_2(Q)$, *для которой выполняется равенство*

$$\int\limits_Q f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0,$$

существует обобщенное решение $u \in H^3_{\text{гр}}(Q)$ *задач I–III, которое определяется с точностью до постоянной, и справедлива оценка*

$$\|u\|_{H^2(Q)} \leqslant c(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{L_2(Q)}),$$

где c *— некоторая положительная постоянная, не зависящая от* u.

Для доказательства теоремы применяется теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Ранее этот подход был применен В.И. Корзюком и Е.С. Чеб в [2] для эллиптических уравнений.

Литература

1. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.

2. *Корзюк В.И., Чеб Е.С.* Граничные задачи для эллиптических уравнений второго порядка // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2007. Т. 15. № 2. С. 48–57.