РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИМ КОМПОЗИЦИЮ ДВУХ ОПЕРАТОРОВ

В.И. Корзюк, В.В. Дайняк

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики,

Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь

korzyuk@bsu.by, dainyak@bsu.by

В ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ относительно функции $u(x)$ рассмотрим линейное дифференциальное уравнение третьего порядка вида

$$\mathcal{L}u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial}{\partial x_0}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right) + \mathcal{L}_1(x, D)u = f(x), \tag{1}$$

где $\mathcal{L}_1(x,D)u = \sum_{k=1}^{n} q_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} - \lambda(x)u$. Здесь a_k, b_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ — постоянные коэффициенты, $\mathcal{L}_1(x, D)$ — дифференциальный полином первого порядка с измеримыми и ограниченными коэффициентами. Обозначим через ν единичный вектор внешней нормали в точках границы $\partial\Omega$. Пусть $\mathcal{L}_0(\nu) = \left(\nu_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\nu_k\right)\left(\nu_0^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\nu_k^2\right)$. К уравнению (1) присоединим однородные граничные условия типа Дирихле

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega^-}, \tag{2}$$

где $\partial\Omega^-$ — часть границы $\partial\Omega$, в точках которой $\mathcal{L}_0(\nu) < 0$.

Наряду с задачей (1)–(2) будем рассматривать и сопряженную, т. е.

$$\mathcal{L}^\star v = g(x), \tag{3}$$

$$v\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega^+}, \tag{4}$$

где $\partial\Omega^+ = \{x \in \partial\Omega | \mathcal{L}_0(\nu) > 0\}$, $\mathcal{L}^\star$ — формально сопряженный к $\mathcal{L}$ оператор.

Задачу (1)–(2) будем рассматривать как решение операторного уравнения

$$\mathcal{L}u = f$$

с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = H_0^3(\Omega)$, а задачу (3), (4) — как решение операторного уравнения

$$\mathcal{L}^\star v = g$$

с $\mathcal{D}(\mathcal{L}^\star) = \mathring{H}^3(\Omega)$. Для доказательства разрешимости этих уравнений строим расширения L и $L^\star$ операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^\star$.

Теорема 1. *Для любых* $u, v \in H_0^1(\Omega)$ *при достаточно больших* $\lambda(x)$ *выполняются неравенства*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c\|Lu\|_{H_0^{-1}(\Omega)}, \tag{5}$$

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c^\star\|L^\star u\|_{H_0^{-1}(\Omega)}, \tag{6}$$

где постоянные c *и* $c^\star$ *не зависят от функций* u *и* v.

В работе, используя энергетические неравенства (5) и (6), доказывается существование и единственность обобщенного решения рассматриваемых задач (1), (2) и (3), (4).

Литература

1. *Корзюк В.И., Дайняк В.В.*// Дифференц. уравнения 1992. Т.28, № 6 С. 1056
2. *Корзюк В.И., Дайняк В.В.*// Вестник БГУ Сер. 1. 2005. № 3. С. 54.