# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ПОЛИТРОПНОГО ГАЗА С ДОЗВУКОВЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

**М.М. Чуйко**

**Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь**
chuiko@im.bus-net.by

В прямоугольнике $(x,t) \in \bar{Q}_T$, $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0,T]$, $\bar{\Omega} = \{x : 0 \leqslant x \leqslant l\}$ рассматриваетс следующая начально-краевая задача для уравнений политропного газа:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2) = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \mathrm{const} = c > 0, \ \gamma = 1,$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad \rho(x,0) = \rho_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

$$v(0,t) + \sqrt{c}\ln\rho(0,t) = \mu_1(t), \quad v(l,t) - \sqrt{c}\ln\rho(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 < t \leqslant T. \tag{3}$$

Здесь $v = v(x,t)$, $\rho = \rho(x,t)$, $p = p(x,t)$ — соответственно скорость, плотность и давление.

Дополнительно предполагается, что начальные условия (2) удовлетворяют неравенствам

$$\|v_0\|_{C_{[0,l]}} + \sqrt{c}\,\|\ln\rho_0\|_{C_{[0,l]}} < \sqrt{c}, \tag{4}$$

$$0 \leqslant v_0'(x) + \frac{\sqrt{c}}{\rho_0(x)}\rho_0'(x) \leqslant c_0, \quad 0 \leqslant v_0'(x) - \frac{\sqrt{c}}{\rho_0(x)}\rho_0'(x) \leqslant c_1, \tag{5}$$

где $\|f\|_{C_{[0,l]}} = \max\limits_{x\in[0,l]} |f(x)|$.

Дифференциальная задача (1)- (3) в инвариантах Римана [1] $r = v + \sqrt{c}\ln\rho$, $s = v - \sqrt{c}\ln\rho$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (v + \sqrt{c})\frac{\partial r}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial s}{\partial t} + (v - \sqrt{c})\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \tag{6}$$

$$r(x,0) = r_0(x) = v_0(x) + \sqrt{c}\ln\rho_0(x), \quad s(x,0) = s_0(x) = v_0(x) - \sqrt{c}\ln\rho_0(x), \tag{7}$$

$$r(0,t) = \mu_1(t), \quad s(l,t) = \mu_2(t). \tag{8}$$

В данной работе исследована устойчивость по начальным данным и сходимость в равномерной метрике разностной схемы

$$\begin{aligned} &r_{ht,i} + (v_{h,i} + \sqrt{c})\hat{r}_{h\bar{x},i} = 0, \quad i = \overline{1,N},\\ &s_{ht,i} + (v_{h,i} - \sqrt{c})\hat{s}_{hx,i} = 0, \quad i = \overline{0,N-1}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$r^0_{h,i} = v_{0,i} + \sqrt{c}\ln\rho_{0,i}, \quad s^0_{h,i} = v_{0,i} - \sqrt{c}\ln\rho_{0,i}, \quad i = \overline{0,N}, \tag{10}$$

$$\hat{r}_{h,0} = \mu_1(t_{n+1}), \quad \hat{s}_{h,N} = \mu_2(t_{n+1}), \quad n = \overline{0,N_0-1}, \tag{11}$$

аппроксимирующей дифференциальную задачу (6)–(8).

Показано, что условие (4) является достаточным для корректной постановки разностной задачи (9)–(11). При нарушении условия (5) на производные начальных данных доказана устойчивость разностной схемы до конечного момента времени, зависящего от начальных данных и связанного с образованием в среде ударных волн.

**Литература**

1. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.