О КОЛЛОКАЦИОННЫХ МЕТОДАХ, ПОСТРОЕННЫХ ПО ЧЕБЫШЕВСКИМ УЗЛАМ

Н.Н. Стрилец

Брестский госуниверситет им. А.С. Пушкина, математический факультет,

б-р Космонавтов 21, 224665 Брест, Беларусь

stryletss@brsu.brest.by, strymm@gmail.com

Для начальной дифференциальной задачи

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_{\text{out}}, \quad f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n, \quad y(x_0) = y_0,$$

определим коллокационный полином $p(x)$ степени s, как в [1]:

$$p(x_0) = y_0, \quad p'(x_0 + c_i h) = f(x_0 + c_i h, p(x_0 + c_i h)), \quad i = \overline{1, s}, \quad h = x_1 - x_0. \tag{1}$$

Коллокационный метод (1) эквивалентен неявному методу Рунге — Кутты (НРК) [1]:

$$\gamma_i = y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(x_0 + c_j h, \gamma_j), \quad i = \overline{1, s}, \quad y_1 = y_0 + h \sum_{j=1}^{s} b_j f(x_0 + c_j h, \gamma_j). \tag{2}$$

При этом $p(x_0 + c_i h) = \gamma_i$, $i = \overline{1, s}$ и $y_1 = p(x_1)$. Тогда многочлен $p(x)$ ($x = x_0 + th$, $0 \leqslant t \leqslant 1$) можно интерпретировать, как интерполяционный полином Лагранжа [1]:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{s} \gamma_j l_j^{[s+1]}(t), \quad \gamma_0 = y_0, \quad l_j^{[s+1]}(t) = \prod_{k \neq j} (t - c_k) \Big/ \prod_{k \neq j} (c_j - c_k). \tag{3}$$

Предложение 1. *Пусть функция f удовлетворяет одностороннему условию Липшица с константой m, а норма определяется скалярным произведением. Тогда коллокационный многочлен $p(x)$ порождает непрерывный НРК-метод порядка s :*

$$\|y(x) - p(x)\| \leqslant \frac{2M_s}{s!} \max_{t \in [0,1]} |\Pi_s(t)|\, h^{s+1}, \quad 0 < h \leqslant \frac{1}{|m|}, \tag{4}$$

где $M_s = \sup\limits_{(x,p) \in D} \left\| \dfrac{d^s f}{dx^s}(x, p) \right\|$, $\Pi_s(t) = \prod_{i=1}^{s} (t - c_i)$.

Анализ (4) показывает, что погрешность можно минимизировать, если в качестве абсцисс c_i взять корни многочлена $\widetilde{T}_s^*(t) = (t-1) T_{s-1}(2t-1)$, где $T_{s-1}(t)$ — полином Чебышева I рода $(s-1)$-ой степени. В результате получается семейство коллокационных методов (1), реализация которых описывается формулами (2), (3). Для изучения свойств устойчивости методов, с учетом их эквивалентного представления, можно воспользоваться выводами теории НРК-методов [2]. Расчеты велись в пакете Maple (точность составляла от 20 до 64 цифр после запятой). Были изучены свойства методов для $3 \leqslant s \leqslant 16$. Для практического применения можно рекомендовать L-устойчивые методы семейства при $s = 4$ и $s = 8$.

Практические эксперименты на модельных задачах позволяют утверждать, что полученные методы являются состоятельными.

Литература

1. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.

2. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М., Мир, 1999.