МЕТОД ДВУСТОРОННЕЙ ПРИСТРЕЛКИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

С.Н. Стельмах

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
stelmakhs@mail.ru

Рассмотрим систему n дифференциальных уравнений второго порядка

$$y'' = f(t, y), \quad a < t < b, \tag{1}$$

с неразделенными условиями

$$g(y(a), y(b)) = 0, \tag{2}$$

$$h(y(a), y(b)) = 0, \tag{3}$$

где $y : [a,b] \to R^n$, $f : \Omega^{n+1} \to R^n, \Omega^{n+1}$ — некоторое $(n+1)$-мерное (t,y) множество, $g, h : R^n \times R^n \to R^n$. Предположим, что решение $y(t)$ задачи (1)–(3) существует, единственно и достаточно гладкое. Для решения задачи (1)–(3) будем использовать метод пристрелки [1], основанный на компромиссном соединении экстаполяционным методов Штермера [2] и метода Ньютона для систем уравнений [3].

В качестве параметра пристрелки выберем значение решения $y^*(t)$ граничной задачи (1)–(3) в точке $t = c$. Выберем начальное приближение $y_c^{(0)}$ к $y^*(c)$, $y_c^{'(0)}$ к $y^{'*}(c)$. Далее введем в рассмотрение пристрелочные задачи Коши:

$$u^{''} = f(t,u), \quad a < t < c, \quad u(t, y_c^{(0)})|_{t=c} = y_c^{(0)}, \quad u^{'}(t, y_c^{(0)})|_{t=c} = y_c^{'(0)}; \tag{4}$$

$$v^{''} = f(t,v), \quad c < t < b, \quad v(t, y_c^{(0)})|_{t=c} = y_c^{(0)}, \quad v^{'}(t, y_c^{(0)})|_{t=c} = y_c^{'(0)}; \tag{5}$$

и с помощью модификации метода Штермера найдем вектор-функции $u(t, y_c^{(0)}), v(t, y_c^{(0)})$. Далее находим $S(y_c^{(0)})$, где $S(y) \equiv \begin{pmatrix} g(u(a,y), v(b,y)) \\ h(u(a,y), v(b,y)) \end{pmatrix}$ и вычисляем первое приближение $y_c^{(1)}$ к y_c^* из системы

$$S(y_c) = 0. \tag{6}$$

Далее итерационный процесс можно продолжить по аналогии, тогда будет построена последовательность $y_c^{(k)}$. Для решения системы(6) часто выгодно использовать метод Ньютона.

Теорема 1. *Если пристрелочные задачи Коши (4),(5) имеют на $[a,b]$ решения класса $C^2[a,b]$ и система (6) удовлетворяет достаточным условиям сходимости метода Ньютона, то алгоритм двусторонней пристрелки для задачи (1)-(3) устойчив, последовательность $y_c^{(k)}$ сходится к точному решению $y^*(t)$ задачи (1)–(3) в точке $t = c$.*

Применение метода Ньютона в случае прямой и обратной пристрелки часто сильно затруднено из-за быстрого накопления вычислительных погрешностей. В этом случае метод двусторонней пристрелки намного предпочтительнее, так как значительно улучшаются свойства матрицы Якоби $\partial S(y_c)/\partial y_c$.

Литература

1. *Keller H.B.* Numerical method of two-point boundary value problems, Ginn-BLeisdell, Waltham, Mass., 1968.

2. *Мысовских И.П. В.В.* Лекции по методам вычислений. М.: Наука, 1962. // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 4. С. 100-104.

3. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельников Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.