КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РЕДУКЦИИ И СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХТОЧЕЧНЫХ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

П.И. Монастырный, Е.В. Кремень, Ю.А. Кремень

Белгосуниверситет, механико-математический факультет

Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь

kremen@bsu.by

В работе развивается новый подход к решению трехточечных сеточных уравнений приведенного вида:

$$y_{i-1} - C\,y_i + y_{i+1} = -F_i, \quad i = \overline{0,\ N-1}, \tag{1}$$

с граничными условиями, порожденными некоторой формой аппроксимации условий Неймана для уравнения Пуассона:

$$y_{-1} - y_0 = g_0, \tag{2}$$

$$y_N - y_{N-1} = g_N, \tag{3}$$

где C — заданная матрица размерности $n \times n$, а F_i, g_0, $g_N \in R^n$ — известные векторы.

По своей природе сеточные граничные задачи принадлежат двум различным направлениям в вычислительной математике. С одной стороны — это системы линейных алгебраических уравнений, которые принадлежат вычислительной линейной алгебре [1], с другой стороны — это дискретные формы граничных задач для дифференциальных уравнений, сохраняющие многие закономерности и свойства дифференциальных уравнений, и, следовательно, они могут быть отнесены по ряду основных свойств к методам численного решения дифференциальных уравнений [2]. Эту двойственную природу сеточных задач можно эффективно использовать при построении новых численных алгоритмов. Основу нового подхода составляет идея построения двухэтапной структуры вычислительного алгоритма [3, 4]. В данном случае на первом этапе сеточная граничная задача редуцируется к замыкающей системе ЛАУ существенно более низкого порядка, а затем полученная система адаптируется к структуре, допускающей реализацию модифицированной формы метода сопряженных градиентов. В работе дается обоснование и доказательство сходимости метода, изучаются особенности его численной реализации. Построенный вычислительный алгоритм обладает свойствами итерационных и точных методов, в силу этого метод имеет ряд преимуществ. В частности, он позволяет обойти процедуру обращения и заполнения матриц, характерную для типичных схем метода прогонки, которые могут быть использованы для решения задачи (1)–(3) при выполнении достаточно жестких ограничений на матрицу C и порядок n; требует существенно меньшего объема компьютерной памяти для своей реализации; а также обладает более широкой областью применимости.

Литература

1. *Годунов С.К.* Решение систем линейных уравнений. Новосибирск: Наука, 1977.
2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
3. *Монастырный П.И., Кремень Е.В.* // Доклады НАН Беларуси. 2004. Т. 48. № 2. С. 5–9
4. *Монастырный П.И., Кремень Е.В., Кремень Ю.А.* Весцi НАН Беларусi, Серыя ф.-м. н. 2008. № 1 С. 41–44.