РЕДУКЦИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ЗАДАЧАМ КОШИ НА ОСНОВЕ УНИТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОАНИЙ

А.И. Кравчук, Ю.А. Кремень, П.И. Монастырный

Белгосуниверситет, механико-математический факультет,

Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь

kremen@bsu.by

Редукция граничных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка к задачам Коши [1] в форме методов прогонки, сопряженных уравнений, на основе линейной комбинации фундаментальных решений и многих других методов [2] для обеспечения ее устойчивости требует жестких ограничений на входные данные уравнений и граничных условий и тем самым существенно ограничивает класс граничных задач, поддающихся эффективному численному решению такими методами.

В работе предлагается и обосновывается новый подход к решению граничных задач для систем о.д.у второго порядка с неразделенными граничными условиями, который базируется на унитарных преобразованиях и редукции исходной задачи к задачам Коши.

Рассматривается система о.д.у. второго порядка

$$y'' = P(t)\, y' + Q(t)\, y + F(t), \quad \alpha < t < \beta, \tag{1}$$

с неразделенными граничными условиями вида

$$Az(\alpha) + Bz(\beta) = C, \tag{2}$$

где $P(t)$, $Q(t)$ — квадратные матрицы порядка n, $F(t)$ — n-мерный вектор-столбец, коэффициенты системы (1) — кусочно-непрерывные функции t, $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$, A_i, B_i, $i = \overline{1,4}$ — комплексные квадратные матрицы порядка n такие, что прямоугольная матрица $[A|B]$ имеет ранг $2n$, $z(t) = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ — комплексный $2n$-мерный вектор-столбец. Предполагается, что решение $y(t)$ задачи (1), (2) существует и единственно.

Путем введения специальной замены для y и y' исходная задача сводится к системе о.д.у. с разделенными граничными условиями, для решения которой предлагается использовать алгоритм унитарной прогонки, обладающей устойчивостью в малом [3–5] и позволяющий существенно расширить класс граничных задач, поддающихся эффективному численному решению. При численной реализации предложенного алгоритма необходимо будет вычислять вспомогательные вектор-функции, которые в силу унитарности матрицы перехода, имеют тот же порядок роста, что и искомое решение граничной задачи и его производная, что является выгодным с точки зрения устойчивости вычислительного алгоритма. В работе дано исследование вычислительных свойств и приведены характеристики метода унитарной прогонки.

Предложенный метод может быть естественным образом применен для решения локальной проблемы собственных значений [6] для задачи (1), (2) в случае, когда $P(t) \equiv P(t,\lambda)$, $Q(t) \equiv Q(t,\lambda)$, $F(t) \equiv 0$, $c = 0$, $\lambda \in C^1$.

Литература

1. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1976.
2. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М., 1989.
3. *Монастырный П.И.* Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1971. Т. 11, № 4. С. 925–933.
4. *Монастырный П.И.* Доклады НАН Беларуси. 2000. Т. 44, № 1. С. 35–38.
5. *Кравчук А.И., Монастырный П.И.* Доклады НАН Беларуси. 2003. Т. 47, № 6. С. 16-20.
6. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М., 1962.