ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ЭРМИТА — БИРКГОФА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ

М.В. Игнатенко[1], **Л.А. Янович**[2]

[1] Белгосуниверситет, механико-математический факультет,
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
ignatenkomv@bsu.by

[2] Институт математики НАН Беларуси,
Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
yanovich@im.bas-net.by

Получены новые интерполяционные формулы Эрмита — Биркгофа в классе гладких функций для дифференцируемых операторов. Построенные формулы базируются на соответствующих интерполяционных многочленах для скалярных функций.

Приведем один из вариантов таких формул. Пусть оператор $F : X \to Y$, где X и Y заданные множества функций, $\delta^\nu F[x; h_1, h_2, \ldots, h_\nu]$ — ν-й дифференциал Гато оператора F в точке x; $\delta^\nu F[x; h]$ — дифференциал того же порядка, где первые $\nu - 1$ направления $h_1 = h_2 = \ldots = h_{\nu-1} \equiv 1$, а ν-е направление является произведением $h_1 h_2 \ldots h_\nu = h$ $(x = x(t),\ h_i = h_i(t) \in X;\ i = 1, \ldots, \nu;\ t \in T \subseteq \mathbb{R})$.

Введем обозначения

$$H_{nj}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_j)(x - x_j)} \quad (j = 0, 1, \ldots, n), \quad \tilde{H}_{n1}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(n+1)!}, \quad \tilde{H}_{n2}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(n+2)!}(x + c),$$

$$\tilde{H}_{n3}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(n+3)!}\left[x^2 + (c - x_i)x + c^2 - \frac{\omega_n^{(n)}(x_i)}{n!}x_i - \frac{\omega_n^{(n-1)}(x_i)}{(n-1)!}\right],$$

где $\omega_n(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$, $c = -x_i - \omega_n^{(n)}(x_i)/n!$, x_i — один из фиксированных узлов интерполирования $(x_i \in X)$.

Рассмотрим операторные многочлены $P_n(x) : X \to Y$ вида

$$P_n(x) = c_0(x) + \sum_{k=1}^{n+3} \int\limits_a^b c_k(s,\ t) \frac{d^p}{dt^p} x^k(t)\, dt \quad (p = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{1}$$

где $c_0(x)$ и $c_k(s,t)$ — некоторые фиксированные функции $(s \in \mathbb{C}^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{N};\ t \in T;\ k = 1, 2, \ldots, n+3)$.

Теорема. *Для операторного многочлена*

$$H_n(x) = F(x_0) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \delta F[x_0 + \tau(x_j - x_0); H_{nj}(x)(x_j - x_0)]d\tau + \sum_{m=1}^{3} \delta^{n+m} F[x_i; \tilde{H}_{nm}(x)]$$

выполняются интерполяционные условия $H_n(x_j) = F(x_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$;

$$\delta^{n+m} H_n[x_i;\ h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_{n+m}] = \delta^{n+m} F[x_i;\ h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_{n+m}]\ (m = 1, 2, 3).$$

Если $F(x) = P_n(x)$ *— операторный многочлен вида* (1), *то* $H_n(x) \equiv P_n(x)$.

Построены и другие интерполяционные формулы типа Эрмита — Биркгофа. Указан класс операторных многочленов, для которых полученные формулы инвариантны. Ряд интерполяционных формул такого типа имеется в [1, 2], а также в некоторых других работах.

Литература

1. *Макаров В.Л., Хлобыстов В.В., Янович Л.А.* Интерполирование операторов. Киев: Наукова думка, 2000.

2. *Янович Л.А., Игнатенко М.В.* Об одном классе формул операторного интерполирования Эрмита — Биркгофа в пространстве дифференцируемых функций // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2005. № 2. С. 11–16.