ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Г.Ф. Громыко [1], **М.А. Ольшанский** [2], **Р.М. Якубук** [3]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
grom@im.bas-net.by

[2] Московский Государственный Университет, механико-математический факультет, 119899 Москва, Россия
Maxim.Olshanski@mtu-net.ru

[3] Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, б-р Космонавтов 21, 224016 Брест, Беларусь
crazyorcmeister@gmail.com

На некоторой замкнутой области рассматривается линейное эллиптическое уравнение. Пусть каким-либо образом произведена дискретизация задачи. Тогда дискретная задача может быть записана как система линейных алгебраических уравнений. Рассматриваемый метод принадлежит к блочным итерационным методам. Группировка неизвестных производится в соответствии с геометрией области и особенностями задачи таким образом, что относительно переменных из каждого блока система имеет трехдиагональный ($A_{ij} = 0$, если $|i-j| > 1$) либо циклический трехдиагональный ($A_{ij} = 0$, если $1 < |i-j| < n-1$, n — размерность системы) вид. Тогда матрица системы может быть записана в блочном виде $A_h = L_h + D_h + U_h$, где L_h — нижняя треугольная, U_h — верхняя треугольная, а D_h — блочная диагональная матрицы. К тому же блоки матрицы D_h имеют трехдиагональную либо циклическую трехдиагональную форму. Для двух соседних приближений по блочному методу Зейделя выполняется равенство $(L_h + D_h)x_{n+1} + U_h x_n = b$. Для нахождения элементов следующего блока система относительно переменных из блока решается при помощи трехдиагональной прогонки [1] либо при помощи ее циклического варианта [2]. В случае симметричной положительно определенной матрицы A_h сходимость блочного метода Зейделя доказывается аналогично тому, как это делается для метода Зейделя [3].

Приведем некоторые способы группировки переменных в блоки.

Пусть рассматривается двумерная линейная эллиптическая задача на прямоугольнике $\Omega = [a,b] \times [c,d]$. Аппроксимируем ее стандартной пятиточечной конечно-разностной схемой на равномерной сетке с величинами шагов $h_x = (b-a)/m$, $h_y = (d-c)/n$.

Занумеруем неизвестные по часовой стрелке, начиная от узлов, лежащих возле границы и передвигаясь к внутренним узлам. Кроме того, сгруппируем в блоки неизвестные следующим образом: в первом блоке находятся неизвестные, соответствующие, узлам, лежащим возле границы области, во втором блоке находятся неизвестные, соответствующие узлам, лежащим непосредственно возле узлов, соответствующих неизвестным первого блока, и т. д. В $i+1$-м блоке находятся неизвестные, соответствующие узлам, лежащим непосредственно возле узлов, соответствующих неизвестным i-го блока. В результате получаем $K = [\min(m,n)/2]$ блоков переменных. Узлы, соответствующие блокам (за исключением, возможно, последнего) образуют замкнутые контуры, при работе с ними используется циклический вариант прогонки. Для этой группировки неизвестных в блоки диагональные блоки матрицы D (за исключением, возможно, последнего) в получившейся системе будут циклическими трехдиагональными. Назовем данную группировку неизвестных в блоки *циклической*.

Рассмотрим ту же задачу с той же дискретизацией. Неизвестные будем упорядочивать лексикографическим образом (узлу (x_i, y_j) соответствует номер неизвестной $(i-1) \times \times (n-1) + j$). В каждый блок будут входить неизвестные, соответствующие узлам с одинаковой первой координатой. Тогда неизвестные разобьются на $m-1$ блоков, в каждом из которых будет по $n-1$ неизвестных. Для этой группировки неизвестных в блоки диагональные блоки в получившейся системе будут трехдиагональными. Назовем данную группировку неизвестных в блоки *лексикографической*.

Литература

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. С. 40.
2. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. С. 535.
3. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. М.: Наука, 1989. С. 89.