ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

О.И. Костюкова [1], **Т.В. Чемисова** [2], **С.А. Ермолинская** [3]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
kostyukova@im.bas-net.by

[2] Университет Авейро, 3810-193 Авейро, Португалия
tatiana@mat.ua.pt

[3] Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Бровки 6, 220013 Минск, Беларусь
lanalex@tut.by

Рассмотрим задачу выпуклого полубесконечного программирования (ПБП):

$$\min_{x \in R^n} c(x), \ f(x,t) \leqslant 0, \ \forall t \in T = [t_*, t^*] \subset R, \tag{1}$$

где T — континуальное множество индексов, функция $c: R^n \to R$, достаточно гладкая в R^n, и функция $f: R^n \times T \to R$, аналитическая в $R^n \times T$, полагаются выпуклыми по x. Обозначим через X множество допустимых планов задачи (1).

В [1] авторами введено понятие неподвижных точек t_j и их степеней неподвижности q_j, $j = 1, \dots, p$, там же представлен алгоритм их нахождения. По ним для плана $x^0 \in X$ задачи ПБП (1) можно построить вспомогательную задачу (см. [2]) следующего вида:

$$\min c(x), \quad h_{js}(x) := \partial^s f(x,t_j)/\partial t^s = 0, \quad s = 1, \dots, q_j, \quad j = 1, \dots, p,$$

$$g_j(x) := \delta(t_j)\partial^{q_j+1} f(x, t_j)/\partial t^{q_j+1} \leqslant 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

$$g_i(x) := f(x, t_i) \leqslant 0, \quad t_i \in T_a(x^0) \setminus \cup_{j=1}^{p}\{t_j\}, \quad i = p+1, \dots, p^0, \quad p^0 \leqslant p + n, \tag{2}$$

где $T_a(x) = \{t \in T : \ f(x,t) = 0\}$; $\delta(t_j) = 1$ при $t_j \in [t_*, t^*)$, $\delta(t_j) = (-1)^{q_j+1}$ при $t_j = t^*$.

В [2] доказан неявный критерий оптимальности, согласно которому вектор $x^0 \in X$ оптимален в задаче (1) тогда и только тогда, когда x^0 оптимален в задаче (2).

Доказано если функция ограничений задачи (1) является аналитической, то вспомогательная задача (2) эквивалентна следующей:

$$\min_{x \in R^n, \ \alpha \in R^r} c(x), \quad x - \tilde{x} - \Psi\alpha = 0, \quad g_j(x) \leqslant 0, \quad j = 1, \dots, p^0, \tag{3}$$

где вектор $\tilde{x}$ строится как в [1], $\Psi = (\psi_i \in R^n, i = 1, \dots, r)$ и ψ_i, $i = 1, \dots, r$, — максимальное число произвольно построенных линейно-независимых векторов, удовлетворяющих свойству $M^k(\tilde{x}, \psi_i) = 0$, $i = 1, \dots, r$, $k = 1, 2, \dots$, где $M^k(x, \psi) = \partial M^{k-1}(x, \psi)/\partial x\, \psi$, $M^1(x, \psi) = \partial h(x)/\partial x \ \ \psi$, $h(x) = (h_{js}(x), \ s = 1, \dots, q_j, \ j = 1, \dots, p)$.

В задаче (3) ограничения-равенства линейные, она удовлетворяет условию Слейтера. Отсюда, согласно неявному критерию оптимальности, получен новый более эффективный критерий оптимальности для задач ПБП (1), где условие Слейтера может нарушаться.

Теорема 1. *Вектор $x^0 \in X$ оптимален в задаче (1) тогда и только тогда, когда существуют такие множители $\mu_j \geqslant 0$, $\mu_j g_j(x^0) = 0$, $j = 1, \dots, p^0$, что*

$$\Psi' \left(\frac{\partial c(x^0)}{\partial x} + \sum_{j=1}^{p^0} \mu_j \frac{\partial g_j(x^0)}{\partial x} \right) = 0.$$

Проведен сравнительный анализ полученного критерия с известными.

Литература

1. *Kostyukova O.I., Tchemisova T.V., Yermalinskaya S.A.* On the Algorithm of Determination of Immobile Indicies for Convex SIP problems // IJAMAS. 2008. Vol. 13. № J08. P. 13–30.

2. *Костюкова О.И., Чемисова Т.В., Ермолинская С.А.* Неявный критерий оптимальности для задач выпуклого полубесконечного программирования // Вестн. ГрГУ. Сер. 2. № 2. С. 73–81.