ВЫЧИСЛЕНИЕ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Е.С. Засухина

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,

ул. Вавилова, 40, 119991, Москва, Россия

zasuhina@ccas.ru

Пусть отображения $W : R^n \times R^r \to R^1$, $\Phi : R^n \times R^r \to R^n$ дважды непрерывно дифференцируемые. Пусть $x \in R^n$ и $u \in R^r$ удовлетворяют системе из n скалярных алгебраических уравнений:

$$\Phi(x, u) = 0_n, \tag{1}$$

где 0_n — нулевой n-мерный вектор. Предполагается, что матрица $\Phi_x^\top(x, u)$ неособенная всюду в интересующей нас области. Тогда по теореме о неявной функции существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $x = x(u)$, такая что $\Phi(x(u), u) = 0_n$, и ее первые и вторые производные удовлетворяют системе уравнений, получаемых последовательным дифференцированием системы (1).

Переменную x часто называют зависимой или фазовой, а переменную u - независимой или управлением. Таким образом, сложная функция $\Omega(u) = W(x(u), u)$ является дважды непрерывно дифференцируемой. Градиент $d\Omega(u)/du$ выражается формулой

$$d\Omega(u)/du = W_u(x(u), u) + x_u^\top \cdot W_x(x(u), u). \tag{2}$$

Производная x_u по теореме о неявной функции определяется из соотношения

$$\Phi_u + \Phi_x \cdot x_u = 0_{nr}. \tag{3}$$

Здесь 0_{nr} — нулевая $n \times r$-матрица. Таким образом, для нахождения градиента функции $\Omega(u)$ необходимо решить rn линейных уравнений.

В соответствии с предложенной Ю.Г. Евтушенко [1] методологией быстрого автоматического дифференцирования (БАД-методологией) соотношения для определения градиента функции $d\Omega(u)/du$ имеют вид:

$$L_x(x, u, p) = W_x(x, u) + \Phi_x^\top(x, u)p = 0_n, \tag{4}$$

$$L_u(x, u, p) = d\Omega/du = W_u(x, u) + \Phi_u^\top(x, u)p, \tag{5}$$

где $L(x, u, p) = W(x, u) + p^\top \Phi(x, u)$ — функция Лагранжа, а p — множитель Лагранжа, $p \in R^n$. Как видно из этих соотношений, для получения градиента сложной функции $\Omega(u)$ необходимо решить одну линейную систему (4), содержащую n уравнений.

В докладе БАД-методология распространяется на случай вычисления вторых производных функции $\Omega(u)$. Полученные формулы содержат сопряженные переменные, которые определяются в результате решения сопряженного матричного уравнения. Количество составляющих его скалярных уравнений есть линейная функция размерности независимой переменной. Эти формулы адаптируются для случая многошаговых процессов, получаемых в результате дискретизации задачи оптимального управления с помощью метода Рунге – Кутты произвольного порядка. Исследуется структура возникающих при этом сопряженных систем. Показано, что эта структура оказывается достаточно простой. Указывается метод решения сопряженных систем. Используя особенности структуры слагаемых в формуле для вычисления матрицы вторых производных функции $\Omega(u)$, строится экономичный алгоритм определения этой матрицы.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ 05-01-00063-а и гранта Президента РФ НШ-2240.2006.1.

Литература

1. *Evtushenko Yu.G.* Computation of exact gradients in distributed dynamic systems // Optimization methods and software. 1998. V. 9. P. 45–75.