МУЛЬТИПЛИКАТИВНО-БАРЬЕРНЫЙ ПРЯМОЙ МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В.Г.Жадан

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН,

Вавилова 40, 119991 Москва, ГСП-1, Россия

zhadan@ccas.ru

Рассматривается линейная задача полуопределенного программирования: требуется найти симметричную положительно полуопределенную матрицу X такую, что

$$\min\ C\bullet X,\quad A_i\bullet X=b_i,\quad i=1,\dots,m,\quad X\succeq 0, \tag{1}$$

где C и A_i — симметричные матрицы порядка n. Скалярное произведение $C\bullet X$ между C и X определяется как $C\bullet X=\mathrm{tr}\ CX$. Двойственной к (1) является следующая задача

$$\max\ b^Tu,\quad V\succeq 0,\quad V=C-u_1A_1-\dots-u_mA_m. \tag{2}$$

Предлагаемый для решения (1) метод является обобщением прямого барьерно-проективного метода Ньютона для задач линейного программирования [1]. Метод основан на решении матричного уравнения $F(X)=X*V(X)=0_{nn}$, где через $X*V$ обозначено симметризованное матричное произведение $X*V=(XV+V^TX^T)/2$, $V(X)$ — матричная функция, задаваемая тем или иным образом.

Пусть $\mathcal{A}$ — $mn\times n$ матрица, составленная из матриц A_i, $1\leqslant i\leqslant m$ и пусть $\mathcal{A}_{\rm vec}$ - $m\times\times n^2$ матрица, i-й строкой которой является вектор $\mathrm{vec}A_i$ (прямая сумма столбцов матрицы A_i). Обозначим также $X^{\otimes}=(X\otimes I_n+I_n\otimes X)/2$. Как показано в [2], в качестве $V(X)$ может быть взята следующая функция:

$$V(X)=C-\mathcal{A}^T\left\{\left[G^{-1}(X)\left(\mathcal{A}\bullet(X*C)+\tau\left(b-\mathcal{A}\bullet X\right)\right)\right]\otimes I_n\right\},\quad G(X)=\mathcal{A}_{vec}X^{\otimes}\mathcal{A}_{vec}^T.$$

Здесь I_n — единичная матрица порядка n, τ — положительный параметр, $\mathcal{A}\bullet X$ — m-мерный вектор, его i-й элемент равен $A_i\bullet X$. Аналогичным образом определяется вектор $\mathcal{A}\bullet(X*C)$. Доказывается, что при выполнении условия невырожденности [3] функция $V(X)$ полностью определена в некоторой окрестности допустимого множества.

Итерационный процесс в методе описывается следующим рекуррентным соотношением

$$X_{k+1}=X_k-\left[\mathcal{D}_n\Lambda^{-1}(X_k)\mathcal{L}_n\right]\bullet F(X_k), \tag{3}$$

где $\Lambda(X)=\mathcal{L}_n\left\{\left[I_{n^2}-\mathcal{P}(X^{\otimes})\right]V^{\otimes}+\tau\mathcal{P}(X^{\otimes})\right\}\mathcal{D}_n$, $\mathcal{P}(X)=X^{\otimes}\mathcal{A}_{vec}^TG^{-1}(X)\mathcal{A}_{vec}$, $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{D}_n$ — соответственно элиминационная и дуплицирующая матрицы [4].

Теорема 1. *Пусть для прямой и двойственной задач (1), (2) имеет место строгая двойственность, причем их решения X_* и V_* строго комплементарны. Пусть, кроме того, X_* есть крайняя точка допустимого множества (1). Тогда метод (3) локально сходится к X_* со сверхлинейной скоростью.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00608) и Программы ведущих научных школ России (НШ-5073.2008.1).

Литература

1. *Evtushenko Yu., Zhadan V.* Stable barrier-projection and barrier-newton methods in linear programming // Comput. Optimiz. and Applications. 1994. V. 3 P. 289–304.

2. *Бабынин М.С., Жадан В.Г.* Барьерно-проективный метод для полуопределенного программирования. — Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ РАН, 2007.

3. *Alizadeh F., Haeberly J.-P.F., Overton M.L.* Complementarity and nondegeneracy in semidefinite programming // Mathematical Programming., Series B. 1997. V. 7. № 2. P. 129–162.

4. *Magnus J.R., Neudecker H.* The elimination matrix: some lemmas and applications // SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1980. V. 1. № 4. P. 422–449.