ФУНКЦИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

А.С. Антипин, А.И. Голиков

Вычислительный Центр РАН,

Вавилова 40, 119333 Москва, Россия

antipin@ccas.ru, gol@ccas.ru

Рассматривается система задач выпуклого программирования

$$w^* \in \mathrm{Argmax}\{f_1(w) \mid g(w) \leqslant y^*, \quad w \in W_0\}, \tag{1}$$

$$\langle p - p^*, g(w^*) - y^* \rangle \geqslant 0, \quad p \leqslant 0, \tag{2}$$

$$y^* \in \mathrm{Argmax}\{f_2(y) - \langle p^*, y \rangle \mid \langle m, \ \ y \rangle = M, \ \ y \in Y_0\}, \tag{3}$$

где $f_1(w)$, $f_2(y)$ и каждая компонента векторной функции $g(w)$ — выпуклые скалярные функции, $W_0 \subset R^n$, $Y_0 \subset R^m_+$ — выпуклые, замкнутые множества, $m = (m_1, m_2, \dots m_m) \geqslant 0$, $M > 0$. Нетрудно видеть, что система (1), (2) эквивалентна системе седловых неравенств задачи выпуклого программирования, зависящей от параметра y:

$$\varphi(y) = \min\{f_1(w) \mid g(w) \leqslant y, \ \ w \in W_0\}, \quad y \in R^m_+. \tag{4}$$

В системе (1), (2) требуется выбрать вектор $y = y^*$ такой, чтобы отвечающий ему вектор множителей Лагранжа $p = p^*$, с помощью которого формируется задача (3), породил оптимум этой задачи, совпадающий с выбранным y^*. Вектор p^*, w^*, y^*, удовлетворяющий этому условию, является решением системы (1)–(3). Существование такого решения доказывается.

Функция $\varphi(y)$, $y \in R^m_+$ известна как функция чувствительности, которой посвящена достаточно обширная литература, известно также, что эта функция выпуклая, субдифференцируемая, причем образ субдифференциала представляет собой выпуклое, замкнутое ограниченное множество, которое совпадает с множеством векторов множителей Лагранжа задачи (4) при любом фиксированном $y \in R^m_+$. Если упростить задачу (1)–(3) и положить $f_2(y) \equiv 0$, то тогда (3) принимает вид

$$y^* \in \mathrm{Argmin}\{\langle p^*, y \rangle \mid \langle m, y \rangle = M, \quad y \in Y_0\}. \tag{5}$$

Несложно видеть, что задача (5) представляет собой необходимое и достаточное условие минимума функции чувствительности $\varphi(y)$ на множестве $Y = \{y \in Y_0, \langle m, y \rangle = M\}$. Таким образом, первые два условия (1)–(3) определяют функцию чувствительности, а последнее определяет задачу ее минимизации на Y, при этом сама функция выступает в роли свертки или скаляризации исходной системы.

В свою очередь система (1)–(3) представляет собой мощный инструмент моделирования оптовых и инвестиционных рынков. Будем трактовать систему как модель оптового рынка двух участников, каждый из которых стремится получить максимальную прибыль. Первый участник (3) передает второму (1) вектор ресурсов $y = y^* \in Y$. Второй, который является производителем некоторого товара — первому вектор цен $p = p^* \geqslant 0$ (они же — множители Лагранжа). Цены играют роль обратных связей. Эти связи балансируют систему и обеспечивают ее устойчивое функционирование.

В докладе предлагаются прямые и двойственные методы решения представленной системы, доказывается сходимость этих методов к равновесному решению. Доказанная сходимость подтверждает факт устойчивого функционирования системы в условиях возмущения начальных данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ 08-01-00619 и гранта Президента РФ НШ-5073.2008.1.