

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

А.Г. Сидорик

БГУ, механико-математический факультет,
пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Беларусь
`anna_incognito@inbox.ru`

Мы рассматриваем преобразование Фурье функций на локально-компактной абелевой группе, принимающих значения в локально-выпуклом векторном пространстве. Первоначальной проблемой в данном направлении было исследование преобразования Фурье в про-

пространстве квадратично интегрируемых по Бохнеру банаховонозначных функций на локально компактной абелевой группе G :

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_G : L_2(G, X) \rightarrow L_2(\widehat{G}, X), \quad (\mathcal{F}x)(\xi) = \int_G \langle \xi, t \rangle_G x(t) d\mu_G(t),$$

где X — банахово пространство, $\widehat{G}$ — группа двойственная к G по Понтрягину (группа характеров), $\langle \xi, t \rangle_G$ — каноническое спаривание $\widehat{G}$ и G , μ_G — мера Хаара.

В результате были получены следующие теоремы [1]:

Теорема 1. Если G — конечная группа, то преобразование Фурье $\mathcal{F} : L_2(G, X) \rightarrow L_2(\widehat{G}, X)$ ограничено для любого банахова пространства X .

Теорема 2. Пусть X — банахово пространство, G — бесконечная локально компактная абелева группа. Пространство X изоморфно гильбертову тогда и только тогда, когда ограничено преобразование Фурье

$$\mathcal{F} : L_2(G, X) \rightarrow L_2(\widehat{G}, X).$$

Далее естественной проблемой было рассмотреть преобразование Фурье функций на локально компактной абелевой группе G со значениями в локально выпуклом векторном пространстве X .

Пусть X — полное локально выпуклое пространство. Согласно общей теории локально выпуклых пространств [2] $X = \lim_{\text{proj}} X_i$, $(X_i)_{i \in I}$ — семейство банаховых пространств. Для всех $i \in I$ определим банахово пространство $L_2(G, X_i)$, и как следствие, определим пространство $L_2(G, X) := \lim_{\text{proj}} L_2(G, X_i)$. Были получены следующие результаты:

Теорема 3. Если G — конечная группа, то преобразование Фурье $\mathcal{F} : L_2(G, X) \rightarrow L_2(\widehat{G}, X)$ ограничено для любого локально выпуклого векторного пространства X .

Теорема 4. Пусть X — полное локально выпуклое пространство, G — бесконечная локально компактная абелева группа. Пространство X изоморфно проективному пределу гильбертовых пространств тогда и только тогда, когда ограничено преобразование Фурье

$$\mathcal{F} : L_2(G, X) \rightarrow L_2(\widehat{G}, X).$$

Литература

1. Radyna Ya., Sidorik A. Fourier transform of function on locally compact Abelian groups taking value in Banach spaces // preprint arXiv:0808.4009.
2. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.