ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА И ТЕПЛИЦЕВЫ ОПЕРАТОРЫ НАД ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫМИ АБЕЛЕВЫМИ ГРУППАМИ

А.Р. Миротин

Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины,

Советская 104, 246119 Гомель, Беларусь

amirotin@yandex.ru

Продолжаются исследования, начатые в [1], [2]. Пусть G — локально компактная абелева группа, X — ее группа характеров с мерой Хаара λ, в которой выделена λ-измеримая подполугруппа T. В [1] определены классы Харди $H_T^p(G)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ и преобразование Гильберта $\mathcal{H}$, определенное на комплексификации $L_T^2(G)$ пространства $\mathrm{Re}H_T^2(G)$, а также при определенных условиях доказана ограниченность преобразования Гильберта в L^p-метрике $(1 < p < \infty)$. В [2] даны обобщения этого результата и приложения к операторам Теплица над G.

Определение 1. *Пусть $\varphi \in L^\infty(G)$, $P_T : L_T^2(G) \to H_T^2(G)$ — проектор Рисса, ассоциированный с $\mathcal{H}$ [1]. Теплицев оператор с символом φ определим следующей формулой:*

$$T_\varphi f = P_T(\varphi f) \ (f \in H_T^2(G)).$$

Теорема 1. *Пусть группа G компактна, $T \cap T^{-1} = \{1\}$ и $X = T^{-1}T$. Для L^2-ограниченного оператора $A : \mathrm{Lin}T \to H_T^2(G)$ следующие утверждения равносильны:*

1) для любых $\chi_1, \chi_2 \in T$ скалярное произведение $\langle A\chi_1, \chi_2\rangle$ зависит только от $\chi_1\overline{\chi_2}$;

2) для любого $\chi \in T$ справедливо равенство $S_\chi^* A S_\chi = A$, где $S_\chi(f) = \chi f$ $(f \in H_T^2(G))$;

3) $A = T_\varphi$ для некоторого $\varphi \in L^\infty(G)$.

При этих условиях $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.

Справедливо частичное обобщение предыдущей теоремы на случай пространств $H_T^p(G)$ $(1 < p < \infty)$.

Рассмотрены также условия фредгольмовости операторов T_φ.

Теорема 2. *Пусть группа G компактна и связна, причем полугруппа T линейно упорядочивает X. Полукоммутатор $T_f T_g - T_{fg}$ компактен в $H_T^2(G)$ для любых $f \in C(G), g \in L^\infty(G)$ тогда и только тогда, когда множество $T \setminus \chi T$ конечно для любого $\chi \in T$.*

Теорема 3. *Пусть группа G компактна и связна, T линейно упорядочивает X, и множество $T \setminus \chi T$ конечно для любого $\chi \in T$. Оператор T_φ с непрерывным символом φ фредгольмов (нетеров нулевого индекса) тогда и только тогда, когда $\varphi \in \exp C(G)$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь.

Литература

1. *Миротин А.Р.* Гармонический анализ на абелевых полугруппах. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008.

2. *Mirotin A.R.* Hilbert Transform in Context of Locally Compact Abelian Groups// Int. J. Pure and Appl. Math. 2008. V. 40.