РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ВЕКТОРНОГО КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С МЕРАМИ

А.В. Махней

Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника,
Шевченко 57, 76025 Ивано-Франковск, Украина
makhney1@yahoo.com

Рассматривается квазидифференциальное выражение

$$L_{mn}(\bar{Y}) \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}(A_{ij}(x)\bar{Y}^{(n-i)})^{(m-j)},$$

где m, n — натуральные числа; $A_{i0}(x)$, $A_{0j}(x)$ — квадратные матрицы l-го порядка с квадратично суммируемыми на $[a,b]$ элементами; $A_{ij}(x) = B'_{ij}(x)$, $B_{ij}(x)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, — квадратные матрицы l-го порядка с элементами, которые имеют ограниченную вариацию на $[a,b]$ и являются там непрерывными справа; $\bar{Y}$ — вектор-столбец. Штрих тут обозначает обобщенное дифференцирование, а, следовательно, $A_{ij}(x)$ — матрицы-меры. Предположим, что $A_{00} \equiv E$, $A_{01} \equiv A_{10} \equiv 0$.

Квазипроизводными функции $\bar{Y}(x)$, соответствующими выражению $L_{mn}(\bar{Y})$, будем называть функции, которые определяются формулами $\bar{Y}^{[k]} = \bar{Y}^{(k)}$, $k = \overline{0,n-1}$, $\bar{Y}^{[n]} = \sum_{i=0}^{n} A_{i0}\bar{Y}^{(n-i)}$, $\bar{Y}^{[n+k]} = -(\bar{Y}^{[n+k-1]})' + \sum_{i=0}^{n} A_{ik}\bar{Y}^{(n-i)}$, $k = \overline{1,m}$.

Сформулируем такую краевую задачу:

$$L_{mn}(\bar{Y}) = \lambda\bar{Y}, \tag{1}$$

$$U_{\nu}(\bar{Y}) = \sum_{j=0}^{r-1}\left(\Gamma_{\nu j}\bar{Y}^{[j]}(a) + \Delta_{\nu j}\bar{Y}^{[j]}(b)\right) = \bar{0}, \quad \nu = \overline{1,r}, \tag{2}$$

где $\Gamma_{\nu j}$, $\Delta_{\nu j}$ — матрицы l-го порядка, составленные из комплексных чисел; λ — комплексный параметр, $r = n + m$. Квазидифференциальное выражение $L_{mn}(\bar{Y})$ и краевые условия (2) порождают квазидифференциальный оператор L.

Теорема 1. *Пусть L — оператор, порожденный регулярными краевыми условиями (см. [1, 2]), и пусть все его собственные значения являются простыми. Тогда любая вектор-функция $f(x)$ из области определения оператора L разлагается в равномерно сходящийся ряд по его собственным функциям*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_{\nu}\bar{Y}_{\nu}(x),$$

где при выполнении условия нормированности $\int_a^b \bar{Z}_\nu^*(x)\bar{Y}_\nu(x)\,dx = 1$

$$d_\nu = \int\limits_a^b \bar{Z}_\nu^*(t) f(t)\,dt,$$

а $\bar{Y}_\nu(x)$, $\bar{Z}_\nu(x)$ *– собственные функции краевой задачи (1), (2) и сопряженной к ней, соответствующие собственным значениям* λ_ν. *и* $\bar{\lambda}_\nu$, *звездочка обозначает эрмитовое сопряжение.*

Литература

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

2. *Махней О.В., Тацій Р.М.* Асимптотика власних значень крайової задачі для векторного сингулярного квазідиференціального рівняння // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. 2007. Т. 12. Вип. 7. С. 110-120.