МАТРИЧНЫЕ КРУГИ ВЕЙЛЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.В. Мазуренко[1], **Р.М. Таций**[2]

[1] Прикарпатский национальный университет, Шевченко 57, 76025 Ивано-Франковск, Украина
mazvic@ukr.net

[2] Politechnika Lubelska, Nadbystrzycka 38, 20-618, Lublin, Polska
otatsiy@yahoo.com

В математической литературе известны (см. [1], [2]) работы, обобщающие теорию кругов Вейля для самосопряженного уравнения Штурма-Лиувилля на полуоси на случаи несамосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, самосопряженной и несамосопряженной систем дифференциальных уравнений. Известна также аналогичная теория для самосопряженных и несамосопряженных якобиевых матриц.

В настоящем докладе показано, что теория кругов Вейля может быть построена и для корректных [3] обобщенных систем дифференциальных уравнений

$$JY' = [B'(x) + \lambda A'(x)]Y. \tag{1}$$

Здесь J — косоэрмитова унитарная матрица размера $p{\times}p$, $Y(x)$ — p-мерная вектор-функция, $B(x), A(x)$ эрмитовы матричные функции порядка p с элементами из класса $BV^+_{loc}[0,\infty)$, их обобщенные производные $B'(x), A'(x)$ суть распределения Шварца нулевого порядка (меры), $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр.

Исследование проводилось методом предельного перехода $b \to \infty$ от конечного интервала $0 \leqslant x \leqslant b$ к полубесконечному $0 \leqslant x < \infty$. Вначале изучалась граничная задача, порождаемая самосопряженным граничным условием $PY(0)+QY(b) = 0$, определяемым неособенной J-унитарной парой матриц $\{P, Q\}$, то есть такой, что $rank(P\ Q) = p$ и $PJP^* = QJQ^*$. В этом случае возникает дробно-линейное преобразование, которое каждой паре $\{P, Q\}$ ставит в соответствие N-функцию $\mathcal{F}(b,\lambda)$, регулярную в области $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и обладающую там свойством $\operatorname{Im}\mathcal{F}(b,\lambda) \geqslant 0$. По ней строится матрица Грина краевой задачи.

При фиксированном λ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ это дробно-линейное преобразование отображает верхнюю полуплоскость в матричний круг, ей принадлежащий. Когда пары $\{P, Q\}$ пробегают все множество J-унитарных пар, то их образы $\mathcal{F}(b,\lambda)$ описывают границу этого круга, то есть матричную окружность

$$\mathcal{F}(b,\lambda) = C(b,\lambda) + R_1^{1/2}(b,\lambda)U_\lambda R_2^{1/2}(b,\lambda), \quad U_\lambda^* U_\lambda = E_p$$

с центром C, левым R_1 и правым R_2 радиусами, явно зависящими от матрицы, обратной к $W(b,\lambda) = \int_0^b \Phi^*(x,0,\lambda)dA(x)\Phi(x,0,\lambda)$, где $\Phi(x,t,\lambda)$ — фундаментальная матрица системы (1). При возростании b круги гнездятся, а их пересечение есть предельный круг, который, однако, может вырождаться в точку, когда один из радиусов равен нулю, то есть когда $\mathrm{tr}\int_0^\infty \Phi^*(x,0,\lambda)dA(x)\Phi(x,0,\lambda) = \infty$.

Исследуется также вопрос о λ-инвариантности рангов радиусов предельного круга и их связь с числом линейно независимых решений системи (1), принадлежащих $L_2\big([0,\infty);dA\big)$.

Литература

1. Орлов С.А. Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра, и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1976. Т. 40. № 3. С. 593–644.

2. Серебряков В.П. Круги Вейля для блочных матриц Якоби // Дифференц. уравн. 1986. Т. 22. № 9. С. 1545–1551.

3. Мазуренко В.В., Таций Р.М. О разрешимости неоднородной граничной задачи для дифференциальной системы с мерами // Дифференц. уравн. 2003. Т. 39. № 3. С. 328–336.