

СХОДИМОСТЬ (C, α) -СРЕДНИХ РЯДА ФУРЬЕ В ТЕРМИНАХ МАКСИМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Е.Ю.Леонова

Белгосуниверситет, механико-математический факультет,
пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Беларусь
genieleo@mail.ru

Для возрастающей функции $\eta : (0, \pi) \rightarrow (0, \pi)$ и $\alpha > 0$ будем писать $\eta \in \Omega(\alpha)$, если $\eta(+0) = 0$ и $\eta(t)t^{-\alpha}$ убывает.

Для $f \in L_{loc}[-\pi, \pi]$ рассмотрим максимальные операторы

$$\mathcal{N}_\eta f(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{\eta(|I|)} \cdot \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f(y)| dy, \quad (1)$$

где \sup берется по всем интервалам $I \subset [-\pi, \pi]$, содержащим точку $x \in [-\pi, \pi]$, $|I|$ — длина I . $\mathcal{N}_\eta f$ измеряет локальную гладкость, что показывает неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq [\mathcal{N}_\eta f(x) + \mathcal{N}_\eta f(y)]\eta(|x - y|), \quad x, y \in [-\pi, \pi].$$

При $\eta(t) = t^\alpha$ максимальные функции (1) впервые ввел А.Кальдерон [1], а при $\eta \in \Omega(1)$ для более гибкой классификации функции по их локальной гладкости — В.И.Коляда [2].

Наш основной результат состоит в оценке с помощью таких максимальных функций скорости приближения функции (C, α) -средними ее ряда Фурье

$$\sigma_n^\alpha f = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} S_k f,$$

где $S_k f$ — частные суммы ряда Фурье функции f , $A_n^\alpha = (\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n)/n!$.

Теорема 1. Пусть $f \in L[-\pi, \pi]$, $0 < \alpha \leq 1$ и $\eta \in \Omega(\alpha)$. Тогда для любого $x \in [-\pi, \pi]$

$$|\sigma_n^\alpha f(x) - f(x)| \leq c \eta\left(\frac{1}{n}\right) \mathcal{N}_\eta f(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

где постоянная c не зависит от f и n .

Отсюда следует классический результат А. Лебега — М. Рисса о (C, α) -суммируемости почти всюду рядов Фурье суммируемых функций, так как для любой функции $f \in L[-\pi, \pi]$ существует $\eta \in \Omega(1)$, для которой $N_\eta f(x) < \infty$ для почти всех $x \in [-\pi, \pi]$. Но теорема 1 дает больше — скорость сходимости $\sigma_n^\alpha f$ -средних в зависимости от локальных свойств функции f .

Подобные результаты установлены нами и для других классических средних рядов Фурье, в частности, для полиномов Джексона и средних Валле Пуссена.

Литература

1. Calderon A.P. Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions // *Studia Math.* 1972. V. 44. P. 167–186.
2. Kolyada V.I. Estimates of maximal functions measuring local smoothness // *Analisis Math.* 1999. V. 25. P. 277–300.