НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Н.Н. Леонов

Институт социологии НАН Беларуси,
Сурганова, 1, корп. 2, 220072, Минск, Беларусь
nick.leonov@gmail.com

Настоящий доклад посвящен обобщениям метрических пространств, получающимся при замене правой части неравенства треугольника в определении расстояния (метрики) выражениями более общего вида. В [1] В.Т. Перекрестом введены так называемые пространства с функцией близости. Определение функции близости отличается от определения расстояния тем, что вместо неравенства треугольника используется следующее более слабое условие: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x, y, z \in X$ из неравенств $d(x, z) < \delta$, $d(z, y) < \delta$ следует неравенство $d(x, y) < \varepsilon$. В [1] доказано, что если d — функция близости на X, то выполняется формально более сильное условие, а именно: существует такая монотонно возрастающая функция $h : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, что

$$d(x, y) \leqslant h(d(x, z) + d(z, y)) \quad \forall x, y, z \in X.$$

Показано также, что для пространства с функцией близости по аналогии с метрическим пространством можно определить понятия открытого и замкнутого шара, причем система открытых шаров также образует базу некоторой топологии.

С другой стороны, в работе [2] для $p \in [1, \infty]$ определены так называемые L^p-метрические пространства. При этом в определении L^p-метрики по сравнению с определением расстояния неравенство треугольника заменяется условием

$$d(x, y) \leqslant [d^p(x, z) + d^p(z, y)]^{1/p} \quad \forall x, y, z \in X$$

при $p < \infty$ и условием

$$d(x, y) \leqslant \max [d(x, z),\, d(z, y)] \quad \forall x, y, z \in X$$

при $p = \infty$. Понятно, что при $p = 1$ мы получаем определение метрического пространства, а при $p = \infty$ — определение ультраметрического (неархимедова метрического) пространства [3].

В докладе рассматриваются пространства с функцией близости и некоторые их разновидности, которые по общности занимают промежуточное положение между пространствами с функцией близости и L^p-метрическими пространствами. Дано определение ν-метрического пространства. Оно равносильно определению пространства с функцией близости, но удобнее для наших целей. Определяются некоторые разновидности ν-метрических пространств, в частности, пространства, названные нормометрическими, которые по общности занимают промежуточное положение между ν-метрическими и L^p-метрическим пространствами.

Излагается некоторый общий метод, позволяющий строить ν-метрики на множествах функций. Метод основан на разновидности функционалов, которые названы перестановочными. Этот метод применен к функциям с произвольными значениями, заданными на некотором множестве неотрицательных чисел, к непрерывным вещественным функциям с компактным носителем и к функциям, убывающим на бесконечности быстрее любой степенной функции. Строятся ν-метрики на произведениях нормометрических пространств и L^p-метрики на подмножествах L^p-метрических пространств. Построены также нормометрические пространства, отличные от L^p-метрических пространств. Приводятся применения полученных результатов к задачам анализа баз данных.

Литература

1. *Перекрест В. Т.* Нелинейный типологический анализ социально-экономической информации. Л., 1983.

2. *Tyson J. T., Wu J.-M.* Characterizations of snowflake metric spaces // Annales Academiae scientarum Fennicae. Mathematica (Ann. Acad. sci. Fenn., Math.). 2005. V. 30. No. 2. P. 313–336.

3. *Schikhof W. A.* Ultrametric calculus. Cambridge, 1984.