ОЦЕНКИ КАСАТЕЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО ПОВЕДЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ГАУССА — ВЕЙЕРШТРАССА

Е.В. Игнатьева

Международный государственный экологический университет им. А.Д. Сахарова
ignatieval@mail.ru

При изучении граничного поведения решений некоторых краевых задач для уравнений параболического типа в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ удобнее выбирать на $\mathbb{R}^n$ метрики, отличные от евклидовой. Следующий способ построения таких метрик взят нами из [1].

Пусть $A_t = \operatorname{diag}(t^{a_1}, \ldots, t^{a_n})$, $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, тогда $\{A_t\}_{t>0}$ — мультипликативная группа линейных преобразований $\mathbb{R}^n$. Для любого $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, существует единственное $t > 0$, для которого $|A_t^{-1}x| = 1$. Положим $d(x) = t$, тогда $d(x-y)$ — квазиметрика на $\mathbb{R}^n$. Если $a_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, то группа порождает метрику, совпадающую со стандартной евклидовой. Пусть еще μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$.

Для $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ определим шарп-максимальные функции

$$f^\sharp_\eta(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\eta(t)\mu(B)} \int_B |f - A_B^{[\alpha]} f| \, d\mu,$$

где функция $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что $\eta \uparrow$, $\eta(t)/t^\alpha \downarrow$, $\alpha > 0$, $\sup$ берется по всем шарам B, содержащим точку x, и $A_B^{[\alpha]}$ — проекторы из $L^1(B)$ на подпространство полиномов $[\alpha] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant \alpha\}$.

Пусть S' — класс распределений медленного роста. Если $f \in S'$ и

$$\varphi(x) = \left(\frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}{(2\pi)^n}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i x_i^2\right), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

свертка $f * \varphi_t(x)$, где $\varphi_t(x) = (\det A_t)^{-1} \varphi\left(A_t^{-1} x\right)$, является решением задачи Коши для уравнений параболического типа в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ (см. [1])

$$\begin{cases} t\, \dfrac{\partial u}{\partial t} = T_t^{-1} \Delta T_t\, u, \\ u|_{t \to 0} \overset{S'}{=} f. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа на $\mathbb{R}^n$ и $T_t \varphi(x) = \varphi(A_t x)$.

Если $A_t x = \sqrt{t} x$, то (1) – задача Коши для однородного уравнения теплопроводности.

Обозначим через $\Omega(0, \alpha]$, $0 < \alpha < \infty$ класс возрастающих функций $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, для которых $\omega(t)/t^\theta \uparrow$ при некотором $\theta > 0$ и $\omega(t)/t^\alpha \downarrow$. Пусть также $\Omega(0, \infty) = \bigcup\limits_{\alpha > 0} \Omega(0, \alpha]$.

Теорема. *Пусть* $p > 1$, $\gamma = a_1 + \ldots + a_n$, $\eta \in \Omega(0, \gamma/p)$, $\beta \in \Omega(0, \gamma]$, $\eta^p \beta / t^\gamma \in \Omega(0, \infty)$. *Для внешней меры* ν *выполнено*

$$\nu(B(x, s)) \leqslant c t^{-\gamma} \beta(s) \mu(B(x, t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < t \leqslant s, \quad \text{и}$$

$$\varepsilon(t) \leqslant c \beta^{-1}\left(t^\gamma / \eta^p(t)\right), \quad \varepsilon, \quad t/\varepsilon(t) \ \text{возрастают}, \quad \varepsilon(+0) = 0.$$

Тогда, если $f, f_\eta^\sharp \in L_\mu^p(\mathbb{R}^n)$ *и* $W f(x, t) = f * \varphi_t(x)$, *то*

$$\int\limits_0^\infty \lambda^{p-1} \nu\{\mathcal{N}_\varepsilon(W f) > \lambda\}\, d\lambda \leqslant c(\|f\|_{L_\mu^p}^p + \|f_\eta^\sharp\|_{L_\mu^p}^p),$$

$$\mathcal{N}_\varepsilon u(x) = \sup\{|u(y, t)| : (y, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, 1],\, d(x - y) < \varepsilon(t)\}.$$

Литература

1. *Calderon A.P., Torchinsky A.* Parabolic maximal functions associated with a distribution, I // Advances in Math. 1975. Vol. 16. № 1. P. 1–64.