ТЕОРЕМЫ КОМПАКТНОСТИ ДЛЯ ВЛОЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

И.А. Иванишко

Белгосуниверситет, механико-математичесий факультет,

Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

ivanishko@bsu.by

Пусть (X, d, μ) — ограниченное хаусдорфово пространство с квазиметрикой d (порождающей топологию X) и положительной борелевской мерой μ. Мы считаем ниже, что d и μ связаны условием удвоения порядка $\gamma > 0$ существует такая постоянная $c > 0$, что

$$\mu B(x,s) \leqslant c\left(\frac{s}{r}\right)^{\gamma} \mu B(x,r), \quad x \in X, \quad 0 < r < s.$$

Здесь $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ — шар с центром $x \in X$ радиуса $r > 0$.

Пусть еще Ω — множество положительных возрастающих функций $\eta : (0,1] \to (0,1]$, для которых $\eta(r)r^{-a}$ почти убывает при некотором $a > 0$ (η почти убывает, если $\eta(r_2) \leqslant c\,\eta(r_1)$ для некоторого $c \geqslant 1$ и всех $0 < r_1 \leqslant r_2$).

Для $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ и $\eta \in \Omega$ определим максимальный оператор [1]

$$\mathcal{N}_\eta f(x) = \sup_B \frac{1}{\eta(r_B)} \fint_B |f - f(x)|\, d\mu, \quad \fint_B f\, d\mu \equiv \frac{1}{\mu B}\int_B f\, d\mu$$

($\sup$ берется по всем шарам B, содержащим точку $x \in X$. r_B — радиус шара B) и классы

$$C^p_\eta(X) = \{f \in L^p(X) : \|f\|_{S^p_\eta} = \|f\|_p + \|\mathcal{N}_\eta f\|_p < \infty\}.$$

В [1] (в случае $X = [0,1]^n$, тогда $\gamma = n$) и в [2] (в общем случае) было доказано следующее вложение соболевского типа: *если* $1 < p < q$, $\eta, \sigma \in \Omega$ *и*

$$\eta(t) = \sigma(t) t^{\gamma(1/p - 1/q)}, \tag{1}$$

то

$$C^p_\eta(X) \subset C^q_\sigma(X).$$

Теперь мы укажем условия для компактности таких вложений.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < q$ *и функции* $\eta, \sigma \in \Omega$ *связаны соотношением (1). Тогда для любой функции* $\sigma_0 \in \Omega$ *такой что* $\lim\limits_{t \to 0} \sigma(t)/\sigma_0(t) = 0$ *вложение*

$$C^p_\eta(X) \subset C^q_{\sigma_0}(X)$$

компактно.

Литература

1. *Kolyada V.I.* Estimates of maximal functions measuring local smoothness // Analisys Math. 1999. V. 25. P. 277 300.

2. *Иванишко И.А.* Оценки максимальных функций Кальдерона-Коляды на пространствах однородного типа // Труды института математики НАН Беларуси. 2004. Т 12. № 1. С. 64–67.