О ВОЗМУЩЕНИЯХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ С БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫМ ЯДРОМ И КОЯДРОМ

В.А. Еровенко, М.В. Мартон

Белгосуниверситет, механико-математический факультет,

пр. Независимости 4, 220030, Минск, Беларусь

erovenko@bsu.by

Пусть X — бесконечномерное комплексное банахово пространство и $B(X)$ — множество ограниченных линейных операторов на X. Положим $R^\infty(T) = \cap_n R(T^n)$. Говорят, что оператор $T \in B(X)$ полурегулярный если область значений $R(T)$ замкнута и справедливо вложение $N(T) \subset R^\infty(T)$, соответственно, оператор $T \in B(X)$ называется существенно полурегулярным если область значений $R(T)$ замкнута и справедливо существенное вложение $N(T) \subset {}_e R^\infty(T)$. Последнее включение означает, что существует конечномерное подпространство $F \subset X$ такое, что $N(T) \subset R^\infty(T) + F$. В частности, это включение выполняется тогда и только тогда, когда $\dim N(T)/(N(T) \cap R^\infty(T)) < \infty$.

Теорема 1. *Пусть T — существенно полурегулярный оператор и пусть T и S ограниченные линейные коммутирующие операторы, то есть $T \in B(X)$ и $TS = ST$. Существует такое $\epsilon(T) > 0$, что если для спектрального радиуса существенного спектра Фредгольма оператора S выполняется неравенство $r_e(S) < \epsilon(T)$, то тогда возмущенный оператор $T + S$ также является существенно полурегулярным .*

Интересным для приложений является свойство устойчивости существенно полурегулярных операторов при возмущении их коммутирующими строго сингулярными операторами (см. [1]). Обозначим существенный спектр Апостола через

$$\sigma_{e\gamma}(T) := \{\lambda \in \mathbf{C} : T - \lambda I \text{ не является существенно полурегулярным}\}.$$

Существенный спектр Апостола $\sigma_{e\gamma}(T)$ непустое компактное подмножество множества $\mathbf{C}$ и $\sigma_{eg}(T) \subset \sigma_{e\gamma}(T) \subset \sigma_{es-f}(T)$, где $\sigma_{eg}(T)$ является существенным спектром Голдберга, а $\sigma_{es-f}(T)$ — полуфредгольмовым существенным спектром (см. [2]).

Теорема 2. *Пусть T и S — ограниченные линейные коммутирующие операторы и S — строго сингулярный возмущающий оператор, тогда существенный спектр Апостола, порожденный существенно полурегулярным оператором, устойчив относительно указанного возмущения, т.е.*

$$\sigma_{e\gamma}(T + S) = \sigma_{e\gamma}(T).$$

Теорема 3. *Пусть T — ограниченный линейный оператор, тогда существенный спектр Апостола $\sigma_{e\gamma}(T)$ — это наибольшее подмножество спектра Апостола $\sigma_{\gamma}(T)$, инвариантное относительно всех коммутирующих строго сингулярных возмущений S. то есть*

$$\sigma_{e\gamma}(T) = \cap\{\sigma_{e\gamma}(T + S)\}.$$

Литература

1. *Еровенко В.А., Мартон М.В.* Свойства существенно полурегулярных операторов и соответствующего спектра Апостола // Доклады НАН Беларуси. 2004. Т. 48. № 6. С. 16–20.

2. *Еровенко В.А., Северенчук Н.Б.* Введение в теорию существенных спектров линейных операторов в банаховых пространствах. Мн.: БГУ, 2000.