О ДОПУСТИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПАР ПРОСТРАНСТВ ОТНОСИТЕЛЬНО ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т.Н. Афанасьева

Кубанский государственный университет,

Ставропольская 149, 350040 Краснодар, Россия

du@math.kubsu.ru

Рассматривается линейное разностное уравнение

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_{nk} x_k + f_n, \quad n \geqslant 0, \tag{1}$$

где $\{x_n\}$, $\{f_n\}$ — последовательности элементов из R^m, A_{nk} — $m \times m$ матрицы с действительными элементами.Введем оператор $\widetilde{A}$, который каждой последовательности x ставит в соответствие последовательность $\widetilde{A}x = \{\sum_{k=0}^{n-1} A_{nk} x_k\}$.

Определение 1. Пара пространств (F, X) допустима относительно оператора $\widetilde{A}$, если $\{\sum_{k=0}^{n-1} A_{nk} f_k\} \in X$ при любом $f \in F$.

Обозначим через l_∞^m линейное пространство ограниченных последовательностей, замкнутое относительно нормы $\|x\| = \sup\limits_{n\geqslant 0}\|x_n\|_{R^m}$; $\alpha_0(c_0)$ — подпространство l_∞^m последовательностей, имеющих предел (нулевой предел) при $n\to\infty$.

Пусть $l_\infty^m = X\oplus Y$ и B — замкнутое линейное подпространство пространства l_∞^m. Тогда имеет место разложение $B = B_X \oplus B_Y$. Предположим, что $\widetilde{A}(X)\subset l_\infty^m$.

Определение 2. Пусть B — замкнутое линейное подпространство пространства l_∞^m. Будем говорить, что подпространство B обладает *свойством* (L), если существует такое $r>0$, что для любого вектора $y\in Y$ и любого $N>0$ в B_Y найдется последовательность $y^{(p)}$, удовлетворяющая условиям $\lim\limits_{p\to\infty} y_n^{(p)} = y_n$, $0\leqslant n\leqslant N-1$ и $r\|y\|\geqslant \|y^{(p)}\|$.

Теорема 1. *Если замкнутое линейное подпространство $B\subset l_\infty^m$ обладает свойством (L) и пара $(X\oplus B_Y, l_\infty^m)$ допустима относительно оператора $\tilde{A}$, то*

$$M = \sup_{n\geqslant 1}\sum_{k=0}^{n-1}\|A_{nk}\| < \infty. \tag{2}$$

Обратно, если для любого оператора $\tilde{A}$, для которого пара $(X\oplus B_Y, l_\infty^m)$ допустима, выполняется (2), то B обладает свойством (L).

Пусть D — некоторое подмножество l_∞^m. Обозначим через $\Pi(D)$ — множество таких последовательностей $m\times m$ — матриц A_n, каждая последовательность одноименных столбцов которых лежит в D.

Теорема 2. *Пусть D — замкнутое подпространство l_∞^m. Пара $(c_0; D)$ $((\alpha_0; D))$ допустима относительно оператора $\widetilde{A}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (2), при любом $N\geqslant 0$*

$$\{A_{nN}\}\in\Pi(D) \tag{3}$$

((2), (3) и $\{\sum_{k=0}^{n-1} A_{nk}\}\in\Pi(D)$).

Литература

1. *Пуляев В.Ф.,Цалюк З.Б.* К вопросу о допустимости некоторых пар пространств для линейных операторов и уравнений Вольтерра // Диф. уравнения. 1983. Т. 19. № 4. С. 684–692.