# НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА УПОРЯДОЧЕННОЙ БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЫ

**Е.А. Алехно**

Белгосуниверситет, механико-математический факультет,

Независимости 4, 220030, Минск, Беларусь

Alekhno@bsu.by

Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра с единицей $e$, $\|e\| = 1$, $\mathcal{A}^+$ — замкнутый конус в $\mathcal{A}$, причем $e \in \mathcal{A}^+$ и, если $x, y \in \mathcal{A}^+$, то $xy \in \mathcal{A}^+$. Ниже будем предполагать, что порядковый интервал $[0, e]$ ограничен по норме и $\mathcal{A}_r = \mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^+$ является пространством Рисса относительно индуцированного из $\mathcal{A}$ порядка. Через $\mathcal{B}_e$ обозначается булева алгебра всех компонент $e$, т.е. $\mathcal{B}_e = \{x \in \mathcal{A}_r : x \wedge (e - x) = 0\}$. Заметим, что если $b_1, b_2 \in \mathcal{B}_e$, то $b_1 b_2 = b_1 \wedge b_2$. Для $b \in \mathcal{B}_e$ и $z \in \mathcal{A}$ полагаем $b^{\mathrm{d}} = e - b$ и $z_b = bzb$.

Элемент $z \geqslant 0$ называется *порядково непрерывным*, если соотношение $w_\alpha \downarrow 0$ влечет $zw_\alpha \downarrow 0$ и $w_\alpha z \downarrow 0$. Линейный функционал $x^*$ называется *порядково непрерывным*, если из $w_\alpha \downarrow 0$ следует $x^* w_\alpha \to 0$. Множество всех порядково непрерывных элементов обозначается $\mathcal{A}_n$, а порядково непрерывных функционалов $\mathcal{A}_n^\sim$. Ниже предполагается, что пространство $\mathcal{A}^* \cap \mathcal{A}_n^\sim$ тотально.

Компонента $b \in \mathcal{B}_e$ называется *$z$-инвариантной*, если $(e - b)zb = 0$. Элемент $z$ *неразложим относительно* $b' \in \mathcal{B}_e$, если не существует $b'' \in \mathcal{B}_e$, $0 < b'' < b'$, такого, что $(b' - b'')zb'' = 0$. Элемент $z$ называется *неразложимым*, если он неразложим относительно единицы $e$.

Будем говорить, что $r(z)$ является *$o$-полюсом* резольвенты $R(.,z)$ элемента $z \geqslant 0$, если $r(z)$ — полюс $R(.,z)$ и соотношения $z \geqslant w \geqslant 0$ влекут $r(z) \geqslant r(w)$, при этом, если $r(z) = r(w)$, то $r(w)$ — полюс $R(.,w)$ и не существует $b_\alpha \in \mathcal{B}_e$, $b_\alpha \downarrow 0$, $u_\alpha > 0$, для которых $b_\alpha u_\alpha = u_\alpha$ и $wu_\alpha = r(w)u_\alpha$ при всех $\alpha$.

Имеет место следующая теорема о нормальной форме.

**Теорема 1.** *Если $\mathcal{A}_r$ — полное по Дедекинду пространство Рисса, $0 \leqslant z \in \mathcal{A}_n$, $r(z) > 0$ и точка $r(z)$ является $o$-полюсом $R(.,z)$. Тогда существует набор $z$-инвариантных компонент $b_i \in \mathcal{B}_e$, $e = b_n > b_{n-1} > \ldots > b_1 > b_0 = 0$, такой, что если для некоторого $i \geqslant 1$ $r(z_{b_i b_{i-1}^{\mathrm{d}}}) = r(z)$, то $z_{b_i b_{i-1}^{\mathrm{d}}}$ неразложим относительно $b_i b_{i-1}^{\mathrm{d}}$.*

Таким образом, как и в случае неотрицательных матриц, спектр положительного элемента упорядоченной банаховой алгебры оказывается сильно зависящим от спектра неразложимых элементов.

Булева алгебра $\mathcal{B}_e$ называется *тотальной*, если либо неравенства $xb > 0$ для всех $b \in \mathcal{B}_e$, $b > 0$, где $x \in \mathcal{A}_n$, влекут $xy > 0$ при $y > 0$, либо неравенства $by > 0$ для всех $b \in \mathcal{B}_e$, $b > 0$, где $y \in \mathcal{A}_n$, влекут $xy > 0$ при $x > 0$.

**Теорема 2.** *Пусть $\mathcal{B}_e$ тотальна, элемент $z > 0$ является порядково непрерывным и неразложимым, причем $r(z)$ — полюс $R(.,z)$. Тогда $r(z) > 0$ и полюс $R(.,z)$ в точке $r(z)$ является простым.*

С помощью рассмотрения алгебры $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ с присоединенной единицей $(0,1)$ можно на примерах убедиться в существенности сделанного в теореме 2 предположения о тотальности булевой алгебры $\mathcal{B}_e$.