О ТОЧНЫХ КОНСТАНТАХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

А.П. Старовойтов, Ю.А. Лабыч

ГГУ им. Ф. Скорины, Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь
svoitov@gsu.unibel.by, jlabych@yandex.ru

В настоящее время теория рациональных приближений является интенсивно развивающейся областью современного математического анализа. Значительный вклад в современную теорию рациональной аппроксимации внесли А. А. Гончар, Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов, В. Н. Русак, Е . А. Рахманов, А. А Пекарский, Е. А. Ровба и другие. Особую ветвь в теории аппроксимации рациональными функциями занимают аппроксимации Паде, которые, являясь конструктивными рациональными приближениями, нашли многочисленные приложения в различных областях математической физики.

В данной работе устанавливается класс функций f, для которых тригонометрические аппроксимации Паде $\pi^t_{n,m}(\cdot\,; f)$ приближают f в равномерной норме со скоростью, асимптотически равной наилучшей.

Пусть $\mathcal{R}^t_{n,m}$ — множество всех рациональных тригонометрических функций $r(x) = p_n(x)/q_m(x)$, у которых числитель $p_n(x)$ и знаменатель $q_m(x)$ являются тригонометрическими многочленами с действительными коэффициентами и $\deg p_n \leqslant n$, $\deg q_m \leqslant m$. Положим также $\mathrm{R}^t_{n,m}(f) := \inf\{\|f - r\| : r \in \mathcal{R}^t_{n,m}\}$, где $\|g\| = \max\{|g(x)| : x \in [0, 2\pi]\}$.

Рассмотрим однопараметрическое семейство целых функций $\mathcal{F} = \{F_\gamma\}$, представимых в виде

$$F_\gamma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx + \sin kx}{(\gamma)_k}, \tag{1}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2, \dots\}$, $(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_k = \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)$, если $k \geqslant 1$.

Определение 1. Тригонометрической аппроксимацией Паде (см. [1]) функции $f \in \mathcal{F}$ назовем такую тригонометрическую рациональную функцию $\pi^t_{n,m}(x; f) = p^t_n(x)/q^t_m(x)$ из класса $\mathcal{R}^t_{n,m}$, числитель и знаменатель которой удовлетворяют условию

$$q^t_m(x) f(x) - p^t_n(x) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} (\widetilde{a}_k \cos kx + \widetilde{b}_k \sin kx), \tag{2}$$

где $\widetilde{a}_k$ и $\widetilde{b}_k$ — действительные числа.

Справедлива следующая теорема (для сравнения с алгебраическим случаем см. [2])

Теорема 1. *Пусть* $F_\gamma \in \mathfrak{F}$. *Тогда для* $\forall x \in \mathbb{R}$ *равномерно по всем* m, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, *где* $\lim\limits_{n\to\infty} (m(n))^{3/2} \Big/ n = 0$, *при* $n \to \infty$

$$F_\gamma(x) - \pi^t_{n,m}(x; F_\gamma) = \frac{(-1)^m\, m!\,(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}\,(\gamma)_{n+m+1}} \mathrm{Re}\left\{(1-i)e^{i(n+m+1)x}\,(1+o(1))\right\}; \tag{3}$$

$$R^t_{n,m}(F_\gamma) \sim \|F_\gamma - \pi^t_{n,m}(\cdot;\, F_\gamma)\| \sim \frac{\sqrt{2}\, m!\,(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m+1}(\gamma)_{n+m}}. \tag{4}$$

Литература

1. *Березкина Л.Л.* Тригонометрические аппроксимации Паде и наилучшие рациональные приближения // Кандидат. диссер. БГУ, 1998.

2. *Старовойтов А.П., Старовойтова А.Н.* Аппроксимации Паде функций Миттаг-Леффлера // Математический сборник. 2007. Т. 198. № 7. С. 109–122.