О СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В НУЛЯХ ДРОБЕЙ БЕРНШТЕЙНА

Е.А. Ровба, К.А. Смотрицкий

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы,

Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь

rovba@grsu.by, k.smotritski@grsu.by

Пусть $\{z_k\}_{k=0}^{+\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, причем $z_0 = i$, $z_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим косинус-дробь Бернштейна

$$m_n(x) = \cos\varphi_n(x), \quad \varphi_n(x) = \arg(z_0 - x) + 2\sum_{k=1}^{n} \arg(z_k - x), \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Для функции $f \in C_\infty$, т.е. непрерывной на $\mathbb{R}$ и такой, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < < \infty$, через $L_{2n}(x; f)$ обозначим интерполяционную функцию Лагранжа с узлами в нулях косинус-дроби m_n:

$$L_{2n}(x; f) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \frac{(-1)^{k+1} m_n(x)\sqrt{1+x^2}}{\varphi_n'(x_k)(x - x_k)\sqrt{1+x_k^2}}, \quad m_n(x_k) = 0, \quad k = 0, \ldots, 2n.$$

Теорема 1. *Для любой функции $f \in C_\infty$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|L_{2n}(x; f)|^2}{1+x^2} dx = \pi \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^2(x_k)}{\varphi_n'(x_k)(1+x_k^2)}.$$

Через $L_2(\rho)$ обозначим множество функций квадратично суммируемых по Лебегу с весом $\rho(x) = (1 + x^2)^{-1}$, причем

$$\|f\|_{L_2(\rho)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|^2}{1+x^2} dx \right)^{1/2}.$$

Следствие 1. *Имеем место соотношение:*

$$\|L_{2n}\|_{C_\infty \to L_2(\rho)} = \sqrt{\pi}.$$

Теорема 2. *Для любой функции $f \in C\infty$ в пространстве $L_2(\rho)$ погрешность приближения ее интерполяционной функцией $L_{2n}(x; f)$ может быть оценена неравенством:*

$$\|f(x) - L_{2n}(x; f)\|_{L_2(\rho)} \leqslant 2\sqrt{\pi} R_{2n}(f, a),$$

где $R_{2n}(f, a) = \inf\limits_{r_{2n}} \max\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - r_{2n}(x)|$ – наилучшее приближение функции f рациональными функциями r_{2n} вида $p_{2n}(x)/\prod_{k=1}^{2n}\left((\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2\right)$, p_{2n} – некоторый многочлен степени не выше $2n$.

В заключении отметим, что аналогичные результаты получены в случае интерполирования с узлами в нулях синус-дробей Бернштейна $\nu_n(x) = \sin \varphi_n(x)$.