ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ АДАМАРА

С.А. Марзан [1], А.А. Титюра [2]

[1] Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина,

Б-р Космонавтов 21, 224013 Брест, Беларусь

marzan-serg@tut.by

[2] Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь

sashtsit@yahoo.com

Пусть $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}$ — дробная производная Адамара порядка $\alpha > 0$ на конечном отрезке $[a, b]$ $(0 < a < b < \infty)$, определяемая формулой [1]:

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\, g)(x) = \delta^n (\mathcal{J}_{a+}^{n-\alpha}\, g)(x), \quad \delta = x\frac{d}{dx} \quad (n = -[-\alpha]),$$

где $\mathcal{J}_{a+}^{\alpha}$ — дробный интеграл Адамара вида:

$$(\mathcal{J}_{a-}^{\alpha}\, g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} g(t)\frac{dt}{t} \quad (\alpha > 0;\ x > a).$$

Рассматривается задача типа Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Адамара порядка $\alpha > 0$:

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = f[x, y(x)] \quad (n-1 < \alpha \leqslant n,\ n \in \mathbb{N},\ a > 0) \tag{1}$$

на конечном отрезке $[a,b]$ $(0 < a < b < \infty)$ действительной оси с начальными условиями

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k} y)(a+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, \ldots, n = -[-\alpha]), \tag{2}$$

где b_k $(k = 1, 2, \ldots, n = -[-\alpha])$ — заданные действительные числа.

Работа посвящена построению приближенного решения задачи (1)-(2) посредством нахождения приближенного решения равносильного ей [2] интегрального уравнения Вольтерра

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f[t, y(t)]\frac{dt}{t}. \tag{3}$$

Для построения приближенного решения применен модифицированный аппроксимационно-итеративный метод В.К. Дзядыка [3]. С использованием свойств дробных интегралов и производных Адамара разработан метод, который позволил, в частности, без применения операции интегрирования получить почти такие же результаты, какие даёт метод последовательных приближений.

Доказана теорема о сходимости последовательности функций, построенных по аппроксимационно-итеративному методу, к решению интегрального уравнения (3), а также найдена оценка точного и приближенного решений. Результаты проиллюстрированы на численных примерах.

Литература

1. *Kilbas A.A.* Hadamard-type fractional calculus // J. Korean Math. Soc. 2001. V. 38. No. 6. P. 1191–1204.

2. *Килбас А.А., Марзан С.А., Титюра А.А.* Дробные интегралы и производные типа Адамара и дифференциальные уравнения дробного порядка // Доклады академии наук. 2003. Т. 389. № 6. С. 734–738.

3. *Дзядык В.К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. К.: Наук. думка, 1988.