ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ

А.А. Килбас, Д.Д. Янович

Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
anatoly.kilbas@gmail.com, darya.yanovich@mail.ru

Рассмотрим задачу типа Коши

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = f[x, y(x)], \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0, \quad x > a; \tag{1}$$

$$(D^{\alpha-k}_{a+}y)(a+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Здесь $n = [Re\,\alpha] + 1$ для α нецелого и $\alpha = n$ для $\alpha \in \mathbb{N}$.

Будем искать решение $y(x) \in L_1(a, b)$ такое, что $(I^{n-\alpha}_{a+}y)(x) \in AC^n[a, b]$. Предположим, что $y(x) \approx L_{n-1}(x)$, где L_{n-1} интерполяционный многочлен

$$L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_n(x) b_k}{(x - x_k)\omega'_n(x_k)}. \tag{3}$$

Здесь x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, некоторые различные точки из $[a, b]$, $\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots$ $\ldots(x - x_n)$. Заменим уравнение (1) следующим его приближением

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) \approx \varphi_n(x), \tag{4}$$

где функция $\varphi_n(x) = f[x, L_{n-1}(x)]$ является уже известной. Далее рассмотрим уравнение

$$(D^{\alpha}_{a+}\tilde{y}_n)(x) = \varphi_n(x) \tag{5}$$

для нахождения $\tilde{y}_n(x)$ при тех же начальных условиях (2). Заметим, что в общем случае это уравнение может иметь не единственное решение.

Решение $\tilde{y}_n(x)$ уравнения (5) с начальными условиями (2) будем искать в вышеуказанном классе функций. Для функций этого класса выполняется равенство

$$(I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}y)(x) = y(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(D^{\alpha-k}_{a+}y)(a+)}{\Gamma(\alpha - k + 1)}(x - a)^{\alpha-k}. \tag{6}$$

Тогда на основании (6) задача (5), (2) в этом классе функций эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра [1]

$$\tilde{y}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha - k + 1)}(x-a)^{\alpha-k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, L_{n-1}(t)]\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \tag{7}$$

В (7) подинтегральная функция является известной и поэтому этот интеграл может быть вычислен по одной из квадратурных формул.

Работа выполнена в рамках проекта "Обобщенные гипергеометрические функции и приложения в математике и механике", входящей в Государственную программу "Математические модели", и при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф08МС-018).

Литература

1. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, 2006.