РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ГАУССА В ЯДРАХ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathfrak{L}_{\nu,\mathfrak{r}}$

А.А. Килбас [1], О.В. Скоромник [2]

[1] Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
anatolykilbas@gmail.com

[2] Новополоцк, Беларусь

Рассматривается интегральное уравнение:

$$ {}_1\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\varphi(x) \equiv x^{\sigma}\int\limits_0^x \frac{(x^{\delta}-t^{\delta})^{c-1}}{\Gamma(c)}\ {}_2\mathrm{F}_1\left(a,b;c;1-\frac{x^{\delta}}{t^{\delta}}\right)t^{\omega}\varphi(t)dt = f(x), \tag{1}$$

содержащее гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2\mathrm{F}_1(a,b;c;z)$ [1] в ядре. Работа посвящена решению уравнения (1) в весовом пространстве $\mathfrak{L}_{\nu,\mathfrak{r}}$ измеримых по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначных функций f на $\mathbb{R}_+$, для которых $\|f\|_{\nu,r}<\infty$, где

$$\|f\|_{\nu,r} = \left(\int\limits_0^{\infty} |\, t^{\nu}f(t)\,|^{r}\ \frac{dt}{t}\right)^{1/r} \quad (1\leqslant r<\infty,\ \nu\in\mathbb{R}). \tag{2}$$

Для оператора ${}_1\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ получено композиционное представление:

$$ {}_1\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\varphi(x) = \frac{1}{\delta}M_{\sigma}N_{\delta}\,{}_1\mathrm{I}^{c}_{0+}(a,b)M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1}N_{\frac{1}{\delta}}\varphi, \tag{3}$$

где ${}_1\mathrm{I}^{c}_{0+}(a,b)$ преобразование вида [1, (10.18)]:

$$ {}_1\mathrm{I}^{c}_{0+}(a,b)\varphi(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{c-1}}{\Gamma(c)}\ {}_2\mathrm{F}_1\left(a,b;c;1-\frac{x}{t}\right)\varphi(t)dt, \tag{4}$$

M_{ξ}, N_a — элементарные операторы определяемые для функции f почти всюду в $\mathbb{R}_+$ как:

$$(M_{\xi}f)(x) = x^{\xi}f(x), \quad (\xi\in\mathbb{C}),$$

$$(N_a f)(x) = f(x^a) \quad (a\in\mathbb{R},\ a\neq 0).$$

Теорема 1. *Пусть* $c,a,b,\ \nu,\omega,\sigma\in\mathbb{R}$, $\delta>0, 1\leqslant r<\infty, c>b>0, a-b\notin\mathbb{Z}$, $\nu<\delta\min(a,b)+\omega+1$. *Тогда оператор* ${}_1\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ *определен на множестве* $\mathfrak{L}_{\nu,\mathfrak{r}}$ *и ограниченно отображает* $\mathfrak{L}_{\nu,\mathfrak{r}}$ *на множество* $\mathfrak{L}_{\nu-\delta(\mathfrak{c}-1)-\omega-\sigma-1,\mathfrak{r}}$, *причем, имеет место равенство (3).*

На основании [1,(35.5), (35.6)], [2, лемма 1], [3,теорема1] получены следующие представления решений уравнения (1):

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta}M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}}M_{-a}\,\mathrm{I}^{-b}_{0+}M_a\,\mathrm{I}^{b-c}_{0+}N_{\frac{1}{\delta}}M_{-\sigma}f(x), \tag{5}$$

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta}M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}}M_{-b}\,\mathrm{I}^{b-c}_{0+}M_{c-a}\,\mathrm{I}^{-b}_{0+}M_{a+b-c}N_{\frac{1}{\delta}}M_{-\sigma}f(x). \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть* $c,a,b,\ \nu,\omega,\sigma\in\mathbb{R}$, $\delta>0, 1\leqslant r<\infty$, $c>b>0$, $a-b\notin\mathbb{Z}$, $\nu<\delta\min(a,b)+\omega+1$, $f\in\mathfrak{L}_{\nu-\delta(\mathfrak{c}-1)-\omega-\sigma-1,\mathfrak{r}}$. *Уравнение (1) имеет единственное решение* $\varphi\in\mathfrak{L}_{\nu,\mathfrak{r}}$, *выражаемое формулами (5) и (6).*

Аналогичные результаты получены для трех модификаций уравнения (1).

Работа выполнена в рамках проекта "Обобщенные гипергеометрические функции и приложения в математике и механике", входящей в Государственную программу "Математические модели", и при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф08МС-018).

Литература

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

2. *Килбас А.А, Щетникович Е.К* Обобщенное H-преобразование в весовых пространствах суммируемых функций // Весці НАН Беларусі, Серыя фіз.-мат. навук. 2004. № 2. С. 14–19.

3. *Килбас А.А., Скоромник О.В.* О решении интегральных уравнений с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах // Вестник ПГУ. Серия С. Фундаментальные науки 2006 № 10. С. 35–38.