ЭКСПОНЕНТА ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В.В. Кашевский

Белгосуниверситет, физический факультет,

Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь

kashev@bsu.by

Пусть функция $f(x)$ является действительной непрерывной и 2π-периодической. Функции поставим в соответствие ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx}, \quad f_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)dx.$$

Рассматривая функции f с точностью до постоянного слагаемого, можно считать, что выполнено условие нормировки

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0.$$

В монографии [1] для периодических функций рассмотрены свойства дробной производной Вейля

$$D_+{}^{(\alpha)}f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^\alpha f_k e^{ikx}.$$

В статье [2] для функции f была определена дробно-логарифмическая производная

$$D^{\alpha,\beta}f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' (ik)^\alpha \ln^\beta |k| f_k e^{ikx}, \quad \alpha > 0,$$

и рассмотрены некоторые ее свойства, связанные с теорией приближений.

Можно [3] определить и логарифмическую производную формулой

$$D^{0,1}f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' f_k \ln(ik)\, e^{ikx}.$$

Пусть

$$\exp\left(D^{0,1}f\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(D^{0,1}f\right)^k}{k!}; \quad Df = \frac{d}{dx}.$$

Теорема 1. *Если 2π-периодическая функция удовлетворяет условию $f'' \in H^\alpha$, то справедливо операторное равенство*

$$\exp\left(D^{0,1}f\right) = Df.$$

Литература

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн.. Наука и техника, 1987.

2. *Кудрявцев В.В.* О рядах Фурье функций, имеющих дробно-логарифмическую производную // Доклады академии наук СССР. 1982. Т. 266. № 2 С. 274-276

3. *Кашевский В.В.* Логарифмический интеграл периодических функций и его свойства // Известия НАН Беларуси. Сер.физ.-мат наук. 2007. № 4. С. 10–15.