[7] *Иорданский М. А.* Конструктивные описания двудольных графов //Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XV Международной конференции (Казань, 2–7 июня 2008г.). — Казань: Изд-во «Отечество». — 2008. — С. 44.

[8] *Иорданский М. А.* Конструктивные описания расщепляемых графов //Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.) — М.: Изд-во механико-матем. факультета МГУ.— 2010. — С. 306–308.

[9] *Бурков Е. В.* Конструктивные описания планарных и эйлеровых графов // Вестник Нижегородского госуниверситета. Математика. — 2010. — № 5(1). — С. 165–170.

Полиэдральные аспекты оптимизационной задачи на циклических перестановках

А. Н. Исаченко, Я. А. Исаченко

`isachen@bsu.by, yarais@mail.ru`

Белорусский государственный университет, Минск

Введение

Рассматривается следующая оптимизационная задача

$$\min_{\pi\in C_n}\sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)}b_i. \tag{1}$$

Здесь C_n — множество циклических перестановок элементов множества $N=\{1,2,..,n\}$, а $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ и $\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ — множества действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a_1<a_2<\dots<a_n$, $b_1<b_2<\dots<b_n$. Для задачи рассматривается полиэдральный подход, основанный на построении системы линейных неравенств для циклического перестановочного многогранника

$$M(C_n)=\operatorname{conv}\{a(\pi)=(a_{\pi(1)},a_{\pi(2)},\dots,a_{\pi(n)})|\pi\in C_n\},$$

и описании его характеристик.

Ранее установлено [1], что $\dim M(C_n)=n-1$ при $n\geqslant 4$ и $\operatorname{vert}M(C_n)=\{a(\pi)|\pi\in C_n\}$, определены отдельные семейства гиперграней многогранника $M(C_n)$.

В работе [2] введено понятие наследуемой грани. Пусть M_1, M_2 — многогранники размерности $d > 2$, причем $\operatorname{vert} M_1 \subset \operatorname{vert} M_2$, а G есть m-мерная грань многогранника M_1 ($1 \leqslant m < d$). Назовем G наследуемой гранью (относительно многогранника M_2), если существует грань F многогранника M_2, такая, что $\dim G = \dim F$ и $\operatorname{vert} G \subseteq \operatorname{vert} F$.

Как известно [3], для перестановочного многогранника $M(S_n)$ задающая его полная неприводимая система имеет вид

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i, \\ &\sum_{i\in w} x_i \geqslant \sum_{j=1}^{|w|} a_j, \quad \forall w \subset N,\, |w| \leqslant n-1. \end{aligned} \tag{2}$$

В [2, 4] установлено, что при $n \geqslant 5$ каждая гиперплоскость

$$H(i) = \{x \in E^n \mid x_i = a_1\},\ i \in \{2, 3, \dots, n\},$$

определяет наследуемую относительно $M(S_n)$ гипергрань многогранника $M(C_n)$.

Семейство гиперграней для $|w| = 2$

Теорема 1. *При $n \geqslant 5$ каждая гиперплоскость*

$$H(i,j) = \{x \in E^n | x_i + x_j = a_1 + a_2\}, \quad i, j \in \{3, \dots, n\},\ i < j, \tag{3}$$

определяет гипергрань многогранника $M(C_n)$.

Доказательство. Согласно определению, множество называется k-мерным, если оно содержит $k+1$ аффинно-независимых точек. Поскольку $\dim M(C_n) = n-1$, то для доказательства необходимо указать $n-1$ аффинно-независимые точки многогранника $M(C_n)$, принадлежащие гиперплоскости (3).

При $n = 3$ множество гиперплоскостей (3) пусто.

Если $n = 4$, то в (3) входит единственная интересующая нас гиперплоскость $H(3,4)$, причём число точек, принадлежащих $H(3,4) \cap M(C_4)$, равно двум, что даёт $\dim(H(3,4) \cap M(C_4)) = 1 < \dim M(C_4) = 3$.

Если $n = 5$, то в (3) входит три гиперплоскости, причём число точек, принадлежащих пересечению $M(C_5)$ с каждой из них, равно четырем. Непосредственной проверкой легко убедиться, что каждое из этих множеств является аффинно-независимым, что влечёт справедливость теоремы для $n = 5$.

Для общего случая при $n \geqslant 6$, не нарушая общности, рассмотрим следующее множество точек:

$$
\begin{array}{l}
(a_j, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \dots, a_n, a_i)\\
(a_j, a_4, a_5, a_3, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \dots, a_n, a_i)\\
(a_j, a_5, a_4, a_6, a_3, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \dots, a_n, a_i)\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(a_j, a_{i-1}, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i+1}, a_3, a_1, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \dots, a_n, a_i)\\
(a_j, a_{i+1}, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+2}, a_1, a_3, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \dots, a_n, a_i)\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(a_j, a_{j-1}, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \dots, a_{j+1}, a_3, a_2, a_{j+2}, \dots, a_n, a_i)\\
(a_j, a_{j+1}, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+2}, a_2, a_3, \dots, a_n, a_i)\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(a_j, a_{n-1}, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, ..., a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, ..., a_3, a_i)\\
(a_j, a_n, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \dots, a_i, a_3)\\
(a_i, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_2, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_1, a_{j+2}, \dots, a_n, a_j)\\
(a_3, a_j, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_2, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_1, a_{j+2}, \dots, a_n, a_i)\\
(a_3, a_i, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \dots, a_n, a_j).
\end{array}
$$

Учитывая тот факт, что множество точек $\{X_1, X_2, \dots, X_{k+1}\}$ является аффинно-независимым тогда и только тогда, когда множество $\{X_2 - X_1, \dots, X_{k+1} - X_1\}$ является линейно независимым, вычтем покоординатно первую точку из всех остальных точек множества. Затем удалим вторую и i-ю координаты, а первую и j-ю координаты переставим в конец. В результате получим $(n-2) \times (n-2)$ матрицу, определитель которой будет равен

$$
(a_{i+1} - a_{i-1})(a_{j+1} - a_{j-1}) \prod_{k=4}^{i-2} (a_{k+1} - a_k) \prod_{l=j+1}^{n-1} (a_{l+1} - a_l) \times
$$

$$
\times (a_i - a_j)(a_1 - a_2)(2a_3 - a_i - a_j).
$$

В силу неравенств $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ определитель будет отличен от нуля. Следовательно, полученное множество разностей является линейно независимым. Последнее влечёт аффинную независимость исходного множества точек. ∎

Следствие. *Каждая гипергрань $H(i,j) \cap M(C_n)$, $i, j \in \{3, \dots, n\}$, $i < j$, $n \geqslant 5$, циклического перестановочного многогранника $M(C_n)$*

является наследуемой относительно перестановочного многогранника $M(S_n)$.

Нижняя оценка для числа гиперграней

Рассмотрим число $f(M(C_n))$ гиперграней многогранника $M(C_n)$. В работе [1] на основании понятия 2-циклических перестановок и преобразования их за счёт одной транспозиции в циклическую перестановку получена следующая нижняя оценка при $n \geqslant 4$:

$$f(M(C_n)) \geqslant \begin{cases} ((k-1)!)^2, & n = 2k, \\ (k-1)!\,k!, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Учитывая наследуемые гиперграни многогранника циклических перестановок для $|w| = 1$ и $|w| = 2$, получим утверждение.

Теорема 2. *Для числа гиперграней* $f(M(C_n))$ *многогранника* $M(C_n)$ *при* $n \geqslant 5$ *справедливо неравенство*

$$F(M(C_n)) \geqslant \begin{cases} ((k-1)!)^2 + 2k^2 - 3k + 2, & n = 2k, \\ (k-1)!\,k! + 2k^2 - k + 1, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Список литературы

[1] *Исаченко Я. А.* Применение полиэдрального подхода к задаче на циклических перестановках // Современные информационные компьютерные технологии: Сб. науч. ст., ч. 2. — Гродно: ГрГУ, 2008. — С. 203–206.

[2] *Исаченко Я. А.* О некоторых гипергранях многогранника циклических перестановок // Технологии информатизации и управления: Сб. науч. ст.. — Минск : БГУ, 2009. — С. 16–19.

[3] *Емиличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.* Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). — М.: Наука, 1981.

[4] *Исаченко Я. А.* Об одной задаче управления на циклических перестановках // Управление информационными ресурсами: Материалы Седьмой Международной научно-практической конференции (Минск, 25 ноября 2009 г.) — Мн.: Акад. упр. при Президенте Респ. Беларусь, 2009. — С. 68–69.